MATEMÁTICAS FINANCIERAS

ÍNDICE

Página

INTERÉS SIMPLE

Todas las actividades financieras descansan en la costumbre de pagar un rédito por el uso del dinero prestado. La mayor parte de los ingresos de los bancos y compañías inversionistas se deriva de los intereses sobre préstamos o de retorno de utilidades por inversiones. En general, todas las operaciones comerciales están relacionadas con los réditos sobre los capitales en juego.

Toda persona que obtiene un préstamo queda obligada a pagar un rédito (renta de un capital) o interés, por el uso del dinero tomado en préstamo. En general, el dinero genera dinero, acumulando valores que varían con el tiempo; el análisis de las causas de la acumulación del dinero en el tiempo es el problema fundamental de las finanzas.

INTERÉS SIMPLE

OBJETIVO

El objetivo de este capítulo es enseñar al estudiante los factores que entran en juego en el cálculo del interés simple y capacitarlo para manejar estos factores y aplicarlos en la solución de problemas frecuentes en el campo financiero. En este capítulo aprenderá, definiciones y manejará conceptos y factores básicos que serán utilizados en los demás capítulos del texto. Al terminar el capítulo el estudiante será capaz de calcular intereses por medio de tablas de factores y aplicando fórmulas; deberá ser capaz de calcular montos, valor actual, tasas de interés y tiempos. Será también capaz de manejar diagramas de tiempo-valor, diagramas de flujo de caja y de resolver ecuaciones de valores equivalentes.

1.2 DEFINICIONES: Tasa de interés y tasa de retorno

Interés es el alquiler o rédito que se conviene pagar, por un dinero tomado en préstamo. Las leyes de cada país rigen los contratos y relaciones entre prestatarios y prestamistas. Los ejemplos y problemas que figuran en este libro deben analizarse, de acuerdo con las leyes y costumbres locales.

Por el dinero tomado en préstamo, es necesario pagar un precio. Este precio se expresa por una suma a pagar por cada unidad de dinero prestada, en una unidad de tiempo convencionalmente estipulada.
La expresión del precio es la tasa de la operación comercial. La unidad de tiempo que acostumbra a utilizarse es el año. La tasa se expresa en tanto por ciento y es el tipo de interés de la operación. Así, un préstamo convenido a la tasa o tipo de interés del r % significa que se conviene que, por cada 100 unidades de dinero prestado, se pagarán como interés r unidades al final de cada año de duración del préstamo.
Cuando se trata de dineros invertidos en un negocio, el inversionista espera recuperar una suma mayor que la invertida; de esta operación, surge el concepto de tasa de retorno. En nuestros desarrollos, nos referimos a la tasa de interés, ésta puede cambiarse por tasa de retorno, cuando se trata de inversiones.

En los países afectados por una desvalorización continuada, la tasa de interés suele ser alta en razón de que conjuga el interés por precio del dinero, con la corrección de su valor, constituyendo la corrección un seudo interés.

Consideramos que se debe separar el rendimiento de los capitales de las tasas de protección del poder adquisitivo del dinero; por esto en la mayoría de los problemas que presentamos en el texto, se da la tasa de interés considerando el capital sin devaluación. Si se incluye la devaluación, aparecen tasas altas que mezclan la devaluación con el rédito de los capitales; los Bancos y las Financieras separan las tasas indicando, por ejemplo, 8% de interés y 21 de corrección monetaria; la corrección tiene una finalidad diferente al del interés, en el capítulo 18 analizamos el tratamiento de la devaluación.

En cada capítulo recomendamos temas de investigación que permiten a los profesores y estudiantes dar un marco de realidad a los problemas adecuándolos a los sistemas financieros y costumbres de su región.

1.3 CALCULO DEL INTERES

El interés o rédito que se paga por una suma de dinero tomada en préstamo, depende de las condiciones contractuales y varía en razón directa con la cantidad de dinero prestada y con el tiempo de duración del préstamo. Designando con:

C el capital o suma prestada
t el tiempo
I el interés o rédito

tendremos, de acuerdo con las leyes de variación proporcional,

$$I = Ctk \qquad (1)$$

donde k es una constante, cuyo valor depende únicamente de las condiciones contractuales del préstamo. Si las condiciones son del r % anual (año comercial de 360 días), para un préstamo de 100 unidades de dinero, tendremos

C = 100 unidades
t = 360 días (año comercial)
I= r unidades (r % = r unidades por cada 100 en 360 días)

Aplicando (1) tendremos:

$$r = 100(360)k$$

Despejando $$k = \frac{r}{100(360)}$$

Remplazando en (1) obtenemos:

$$I = \frac{Ctr}{100\,(360)} \qquad (2a)$$

Para el año de 365 días, año real, el mismo desarrollo conduce a:

$$I = \frac{Ctr}{100\,(365)} \qquad (2b)$$

Para años bisiestos, el año real es de 366 días.

Interés simple ordinario o comercial es el que se calcula considerando el año de 360 días. Interés simple real o exacto es el que se calcula con año calendario de 365 días y de 366, si es año bisiesto.
Los bancos acostumbran a calcular los intereses, tomando como base el año de 360 días; pero para la duración del tiempo de préstamos a plazos menores que un año, cuentan los días efectivos calendarios.

Interpretación del Factor k en Formula (1)

$$k = \frac{r}{100(360)} = \frac{r}{100} \cdot \frac{1}{360}$$

$$\frac{r}{100} = i \text{ (tanto por uno)}$$

remplazando $k = \dfrac{i}{360}$

El factor k es el tanto por uno en un día, si el tiempo se expresa en días.

1.5 RELACION ENTRE EL INTERES COMERCIAL Y EL INTERES REAL

Interês ordinario $= I_0 = \dfrac{Ctr}{100(360)}$

Interés real $= I_r = \dfrac{Ctr}{100(365)}$

Dividiendo

$$\frac{I_0}{I_r} = \frac{\frac{Ctr}{100(360)}}{\frac{Ctr}{100(360)}} = \frac{365}{360} = \frac{73}{72}$$

$$I_r = \frac{72}{73} I_0 = (1 - \frac{1}{73}) I_0$$

$$I_r = I_0 - \frac{1}{73} I_0$$

El interés real o exacto es igual al interés ordinario o comercial, menos 1/73 del mismo.

Ejemplo 1.1 Calcular el interés ordinario y el interés real de $10, 000 prestados al 14% durante 65 días.

C = $10 000
t = 65 días
r = 14%

$$I_r = \frac{Ctr}{100(365)}$$

$$I_r = \frac{10\,000(65)(14)}{100(365)} = \$252{,}78$$

Interés ordinario = $ 252,78
Para calcular el interés real aplicamos la fórmula (3)

$$I_r = I_0 - \frac{1}{73} I_0$$

$$I_r = 252{,}78 - \frac{1}{73} \cdot 252{,}78 = \$\,249{,}32$$

El interés real puede calcularse directamente, aplicando (2b)

$$I_r = \frac{Ctr}{100(365)}$$

$$I_r = \frac{10\,000(65)(14)}{100(365)} = \$\,249{,}32$$

1.6 DETERMINACIÓN DEL TIEMPO

Desde muy antiguo, con el objeto de facilitar los cálculos, se acostumbra suponer el año de 360 días dividido en 12 meses de 30 días cada uno. Obsérvese que 360 tiene los siguientes divisores: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 y 180. Estos divisores permiten un gran número de simplificaciones, muy útiles, cuando se trabaja sin máquina de calcular.
Existen varias maneras de medir el tiempo que interviene en el cálculo de los intereses. Es importante que el lector aplique sus costumbres locales, en la solución de los problemas.

Días inicial y terminal. Para la cuenta de los días, es costumbre excluir el primer día e incluir el último. Así, para un préstamo contraído el 10 de enero y pagado el 25 del mismo mes, el tiempo comercial trascurrido es de 15 días. En algunos países, la costumbre es contar el primero y el último día; en tal caso el tiempo comercial sería de 16 días.

Fecha de vencimiento. La fijación de la fecha de vencimiento se establece contractualmente. Por ejemplo, un préstamo que se recibe el 10 de marzo a 3 meses deberá pagarse el 10 de junio; pero cuando el mismo préstamo se reciba a 90 días, deberá pagarse el 8 de junio, si la costumbre es contar sólo el día terminal. Si la fecha terminal corresponde a un día festivo, la costumbre local indicará si el pago debe recibirse el primer día laboral siguiente, sin contar días adicionales para el cobro de intereses.
Para calcular el tiempo trascurrido entre la fecha inicial y la fecha terminal de períodos mayores de un año, la costumbre comercial es calcular el tiempo aproximado, computando los años de 360 días y los meses de 30 días. Así, para calcular el tiempo trascurrido entre el 3 de abril de 1973 y el 14 de septiembre de 1975, en las operaciones aritméticas con números complejos aprendimos el siguiente método:

	1975 años	**9 meses**	**14 días**
menos	**1973 años**	**4 meses**	**3 días**
	2 años	**5 meses**	**11 días**

igual 720 días + 150 días + 11 días = 881 días

Para períodos menores de un año, la costumbre comercial es contar los días calendarios que hay entre dos fechas.

Tabla 1 Número exacto de días entre dos fechas (años no bisiestos)
Nota., No se incluye el día inicial

1.7 TABLAS PARA EL CALCULO DEL TIEMPO Y PARA LAS EQUIVALENCIAS DECIMALES

Desde el día del mes inicial	Al mismo día del mes terminal											
	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Ene.	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Feb.	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Mar.	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abr.	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
May.	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Jun.	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Jul.	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Ago.	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Sep.	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Oct.	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Nov.	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Dic.	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Los números de las líneas horizontales indican los días trascurridos, entre cierto día del mes inicial y el mismo día del mes terminal; por ejemplo, desde el 3 de mayo de un año, al 3 de octubre del mismo año hay 153 días. Esto es igual al número anotado en la intersección de la horizontal correspondiente al mes inicial, mayo, con la vertical del mes terminal, octubre. Si el día del mes inicial es diferente al día del mes terminal, para el cálculo se presentan dos casos:

(a) El día del mes terminal es mayor que el día del mes inicial: en este caso se suma la diferencia de los días, al número definido por el inicial y el mes terminal.

Ejemplo 1.2 Calcular los días trascurridos entre el 3 de septiembre de un año y el 15 de abril del año siguiente.
Diferencia entre Ios números de días =15 — 3 =12
Número correspondiente a la intersección septiembre-abril = 212

$$212+12=224$$

Entre las dos fechas propuestas, hay 224 días calendarios.

(b) El día del mes terminal es menor que el día del mes inicial: en este caso la diferencia entre el día terminal y el inicial es negativa; entonces, se procede a restar la diferencia al número intersección de los meses.

Ejemplo 1.3 Calcular tos días que hay entre el 18 de marzo y el 10 de noviembre del mismo año.
Diferencia entre los números de días =10 -18 = -8
Número correspondiente a la intersección marzo-noviembre = 245

245 - 8=237

Entre las dos fechas propuestas hay 237 días calendarios.

La tabla 1 es de gran utilidad para determinar la fecha terminal conocida, la fecha inicial y el número de días. El cálculo se hace con gran rapidez, sin necesidad de contar los días en un calendario.

Ejemplo 1.4 El día 13 de marzo se firmó un pagare a 120 días. Calcular la fecha terminal. En la línea horizontal del mes inicial, marzo, se busca el número más próximo a 120, en nuestro problema es el número 122 que corresponde al mes terminal julio, la diferencia 122 -120 = 2 se resta a los días del mes inicial y se obtiene el número de días del mes terminal. En nuestro problema 13 - 2 = 11.
Fecha de vencimiento 11 de julio del mismo año.

Equivalencia de decimales de año a días y meses Con frecuencia, en los problemas resulta el tiempo expresado en decimales de año; para convertirlos a días se tienen las siguientes equivalencias:

Año comercial de 360 días		Año calendario de 365 días	
0,1	=36 días	0,1	=36,5 días
0,01	=3,6 días	0,01	=3,65 días
0,001	=0,36 días	0,001	= 0,365 días

Ejemplo 1.5 la respuesta de un problema es 3,578 años (de 360 días). Expresar el resultado en años, meses y días. Sin efectuar el producto por 360, puede procederse así:

0,5 =5(36) =180 días
0,07 =7(3,6) = 25,2 días
0,008 =8(0,36) =2,9 días

Total 208 días = 6 meses, 28 días

3,578 años equivalen a 3 años, 6 meses, 28 días.

Equivalencia de días o decimales de año En las librerías se consiguen tablas que expresan cualquier número de días en decimales de año, tanto de 360 días como de 365 días; en ellas, se encuentran las equivalencias, desde uno hasta 365 días.
El uso de las actuales máquinas de calcular ha disminuido la importancia de tales tablas y su uso es poco frecuente.
Las tablas 2 y 3 que se dan a continuación, son tablas resumidas que expresan los decimales equivalentes a las fracciones $^{t}/_{360}$ y $^{t}/_{365}$, desde uno a nueve días.

Tabla 2

$$\frac{t}{360}$$

Días	Decimales de año
1	0,00277778
2	0,00555556
3	0,00833333
4	0,01111111
5	0,01388889
6	0,01666667
7	0,01944444
8	0,02222222
9	0,02500000

Tabla 3

$$\frac{t}{365}$$

Días	Decimales de año
1	0,00273973
2	0,00547945
3	0,00821918
4	0,01095890
5	0,01369863
6	0,01643836
7	0,01917808
8	0,02191781
9	0,02465735

Con ellas, pueden calcularse con rapidez los decimales de año equivalentes a cualquier número de días. En muchos casos, pueden simplificarse los cálculos y efectuarlos con gran rapidez, si los divisores de 360 permiten expresar el tiempo en fracciones de año. Así por ejemplo : 30 días $= ^{1}/_{12}$; 60 días $= ^{1}/_{6}$; 90 días $= ^{1}/_{4}$, etc. El éxito de esta forma de operar depende exclusivamente del buen conocimiento que el lector tenga de las operaciones aritméticas.

Ejemplo 1.6 (Sin utilizar máquina de calcular para el cociente $^{233}/_{360}$).
Calcular los decimales de un año de 360 días que equivalen a 235 días. Se utiliza la tabla 2 y se obtiene:

200 días	=	0,555556	(100 veces el decimal correspondiente a 2)
30 días	=	0,083333	(10 veces el decimal correspondiente a 3)
5 días	=	0,013889	
suman 235 días	=	0,652778	años de 360 días.

Las calculadoras y las tablas de factores. El uso de las calculadoras permite prescindir de las tablas de diversos factores de uso frecuente, ya que los valores pueden obtenerse, directamente, con una calculadora; no obstante, consideramos de gran importancia que el estudiante domine el uso de las diversas tablas que se estudian en este texto.

En el campo financiero, industrial o comercial, el uso de las tablas para problemas específicos seguirá siendo un medio ágil y seguro de cálculo. Uno de los objetivos de este texto es el de capacitar al estudiante para que pueda organizar los métodos de solución de los problemas que se le presentarán en sus actividades profesionales y producir las tablas que necesite, para los cálculos cotidianos.

1.8 FORMULAS MODIFICADAS PARA EL CALCULO DEL INTERES SIMPLE 1NTERES SIMPLE

Con la finalidad práctica de hacer más fácil y rápido el cálculo de los intereses, es costumbre trasformar (2) en otras equivalentes que presentamos a continuación.

$$I = \frac{Ctr}{100(360)}$$ **agrupando en otra forma los factores, se tiene**

$$I = C \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{t}{360}$$

$$\frac{r}{100} = i \text{ (tanto por uno)}$$

$$\frac{t}{360} = n \text{ (tiempo expresado en años)}$$

Remplazando $$I = Cni \qquad (4)$$

Para aplicar (4), el tiempo se expresa en años y la tasa, en tanto por uno.

Ejemplo 1.7 Calcular el interés que debe pagarse por un préstamo de $ 250 000 al 10% en 240 días (si no se indica lo contrario, el interés es el comercial u ordinario).

Para aplicar la fórmula (4) primero convertimos los días a decimales de año y para ello utilizamos la tabla 2

200 días = 0,555556
<u>40 días = 0,111111</u>
240 día = 0,666667

C = $ 250 000
N = 0,666667 días
i = 0,1

$$I = 250\,000\,(0{,}666667)(0{,}1)$$
$$I = \$\ 16\,666{,}67$$

Introduciendo en (2) los conceptos de factor de interés simple y de numeral, se obtienen las dos importantes fórmulas que se desarrollan a continuación y que son las que más ventajas prácticas ofrecen, para el cálculo de intereses

$$I = \frac{Ctr}{100(360)}$$

$$I = Ct \cdot \frac{r}{36\,000}$$

$$\frac{r}{36\,000} = f \text{ (factor de interés simple)}$$

Remplazando, se tiene

$$I = Ctf \qquad (5)$$

El factor f de interés simple es el tanto por uno en un día. Para el uso de este factor, el tiempo debe expresarse en días.
El producto Ct, que corresponde al capital por el tiempo, se remplaza por la letra N y recibe el nombre de numeral.

Remplazando en (5) $Ct = N$
obtenemos $I = Nf$ **(6)**

En todos los países circulan tablas financieras que contienen diferentes factores para el cálculo de intereses simples y compuestos. En ellas, se encuentran las tablas para los factores de interés simple correspondientes a los tipos de interés más utilizados.
Las tablas que se dan a continuación tienen los valores de f para los tipos de interés que, con frecuencia, se utilizan en este libro. El lector comprenderá la importancia que tiene utilizar tablas de factores, al observar la rapidez y contabilidad que se logra en los cálculos. Las empresas financieras preparan sus propias tablas para los tipos de interés con que normalmente trabajan.

Tabla 4
Interés comercial

$$f = \frac{r}{36\,000}$$

Tabla 5
Interés real

$$f = \frac{r}{36\,500}$$

r	f
1/4	0,0000069444
1/2	0,0000138889
5	0,0001388889
6	0,0001666667
7	0,0001944444
8	0,0002222222
9	0,0002500000
10	0,0002777778
11	0,0003055556
12	0,0003333333
13	0,0003611111
14	·0,0003888889

r	f
1/4	0,0000068493
1/2	0,0000136986
5	0,0001369863
6	0,0001644444
7	0,0001917808
8	0,0002191781
9	0,0002465753
10	0,0002739726
11	0,0003013699
12	0,0003287671
13	0,0003561644
14	0,0003835616

Con las tablas anteriores, puede calcularse el valor de f para otros tipos de interés. Por ejemplo, para 6 $^{1}/_{4}$ % se tiene:

$$6\ ^{1}/_{4}\ \% = 6\% + {}^{1}/_{4}\ \% = 0{,}0001666667 + 0{,}0000069444$$

para 6 $^{1}/_{4}$ %; f = 0,0001736111

Ejemplo 1.8 Calcular el interés que debe pagarse por un préstamo de \$ 60 000, durante 120 días al 7 $^{1}/_{2}$ % .
Resolveremos este problema, aplicando la fórmula (5) y utilizando la tabla 4:

$$I = Ctf$$

C = \$60 000
t= 120 días
f = 0,0001944444 + 0,00001388889 = 0,0002083333
I = 60 000(120)(0,000208333) = 1499,9998
I = \$1500

La fórmula (6) tiene una importante aplicación en el cálculo de intereses sobre cuentas corrientes que son frecuentes en los negocios. En este tipo de cuentas con intereses, se cargan o abonan intereses sobre saldos, por el tiempo de permanencia del saldo; la fórmula (6) permite gran rapidez en el cálculo de los intereses.
Sean: S_1, , S_2 , S_3 , ... , S_n ,, , los distintos saldos y t_1, , t_2 , t_3 , ..., t_n ,, , los tiempos de permanencia de cada uno de ellos. Los productos S_1, t_1, , $S_2\,t_2$, $S_3\,t_3$, ... , $S_n\,t_n$,, , son los numerales correspondientes a cada saldo; aplicando la fórmula (6) para el cálculo de los intereses correspondientes a cada saldo, se tiene:

$$I_1 = N_1 f$$
$$I_2 = N_2 f$$
$$I_3 = N_3 f$$
$$\vdots$$
$$I_n = N_n f$$

Sumando $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = I = (N_1 + N_2 + N_3 + \ldots N_n)f$

Utilizando el signo de sumatoria

$$I = f \sum_{i=1}^{n} N_i \qquad (7)$$

Nota Al saldo débito se le coloca signo positivo y al saldo crédito, signo negativo. Los intereses serán de cargo o abono, según su signo sea positivo o negativo.

Ejemplo 1.9 Cerrar el 30 de junio la cuenta corriente con intereses del 14%, que tuvo el siguiente movimiento: saldo el lo. de enero $ 20 000, débito; el 3 de febrero, abono de $12 000; el 7 de marzo, cargo de $ 3000; el 16 de abril abono de $15 000; el 28 de mayo, cargo de $ 3000; el 10 de junio, cargo de $ 30 000.

Presentamos el movimiento, en un papel de contabilidad

Fecha	Detalle	DEBE	HABER	SALDO	ds.	NUMERAL
1-I	saldo			20 000,00 D		
3-II	abono		12 000,00	8 000,00 D	33	+660 000,00
7-III	cargo	3 000,00		11 000,00 D	32	+256 000,00
16-IV	abono		15 000,00	4 000,00 Cr	40	+440 000,00
28-V	cargo	3 000,00		1 000,00 Cr	42	−168 000,00
10-VI	cargo	30 000,00		29 000,00 D	13	− 13 000,00
30-VI	c/o int.	682,50		29 682,50	20	+580 000,00
						1 755 000,00

Los días trascurridos entre dos fechas sucesivas se calculan en la tabla 1. El valor de f para el 14% se tiene en la tabla 4

f = 0,0003888889

Aplicando la fórmula (7), I= 0,0008888889(1 755 000) = 682,50

I= $682,50

El planteamiento de los problemas económico-financieros se desarrolla en torno de dos conceptos básicos que son: el de CAPITALIZACION y el de ACTUALIZACION. El concepto de capitalización se refiere al estudio del valor en fecha futura o monto que se obtendrá o en que se convertirán los capitales colocados en fechas anteriores. El concepto de actualización se refiere al estudio del valor en la fecha actual o presente de capitales que se recibirán en fecha futura.
En otras palabras, capitalizar es trasladar y valorizar capitales del presente al futuro. Actualizar es traer y valorizar capitales, del futuro al presente.
El monto es el valor acumulado del capital agregados los intereses devengados. En otras palabras, el monto es igual al capital, más los intereses. Sean:

Por definición de la fórmula (4) remplazando

C = capital

I = intereses

S = monto

$$S = C + I$$

$$I = Cni$$

$$S = C + Cni$$

$$S = C\,(1 + ni)$$

Ejemplo 1.10 Calcular el monto que debe pagarse por una deuda de $ 20 000 el 22 de junio, si el pagaré fue firmado el 30 de enero, al 8% de interés.

Nota Conviene que el lector resuelva este problema por diferentes métodos; el ejemplo lo trataremos, utilizando las tablas ya estudiadas.

Cálculo del tiempo (tabla 1) t = 151 — (30 — 22) = 151 — 8 = 143 días.

Equivalencia a decimales de año (tabla 2)

$$\begin{array}{ll} 100 \text{ días} = & 0{,}277778 \\ 40 \text{ días } = & 0{,}111111 \\ \underline{3 \text{ días } =} & \underline{0{,}008333} \\ 143 \text{ días} = & 0{,}397222 \text{ años} \end{array}$$

i = 0,08
S = C(1 + ni)
S = 20 000(1 + 0,397222 * 0,08)
S = 20 000(1 + 0,03177776)
S = 20 000(1,03177776)
S = $20 635.56

1.10 VALOR ACTUAL o VALOR PRESENTE DE UNA DEUDA

El valor actual o presente de una suma, que vence en fecha futura, es aquel capital que, a una tasa dada y en el período de tiempo contado hasta la fecha de vencimiento, alcanzará un monto igual a la suma debida. La definición anterior es para el valor actual a interés simple, que es diferente a la del valor actual que daremos al estudiar el descuento bancario.

De la definición, se desprende que hallar el valor actual es despejar en (8) el capital, conocidos el monto y los intereses.

$$S = C\,(1 + ni)$$

$$C = \frac{S}{1 + ni} \qquad (9)$$

Respecto a los símbolos que se utilizan en matemáticas financieras, hay cierta anarquía, así el valor actual o presente se expresa con alguna de las siguientes letras C, P, VP y para el monto se utiliza alguna de las letras S, M, F, VF; esto sin contar con la notación estándar que presentamos al final de 4.10. Nosotros utilizaremos S para expresar el monto y C para el valor actual o presente.

La diferencia entre la cantidad a pagar en fecha futura y su valor actual es el descuento.

C = capital
S = monto
D = descuento
D =S - C (10)

El descuento dado por la fórmula anterior recibe el nombre de descuento racional o matemático, si remplazamos el monto por su valor dado en (8), se tiene:

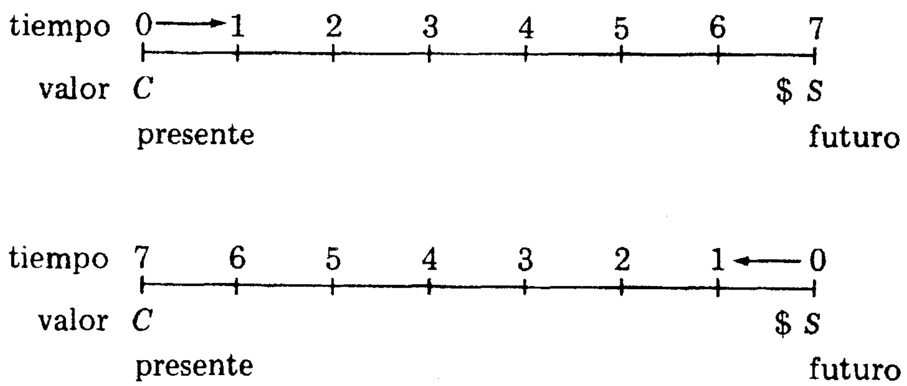
$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & D = S - C \\
& S = C(1 + ni) \\
& D = C(1 + ni) - C = C + Cni - C \\
& D = Cni
\end{aligned}
$$

Es decir: El descuento racional o matemático es igual a los intereses simples del capital que, en fecha futura, dará el monto de la deuda.

El descuento bancario corresponde a otra definición y, por lo tanto, sus métodos de cálculo son diferentes.

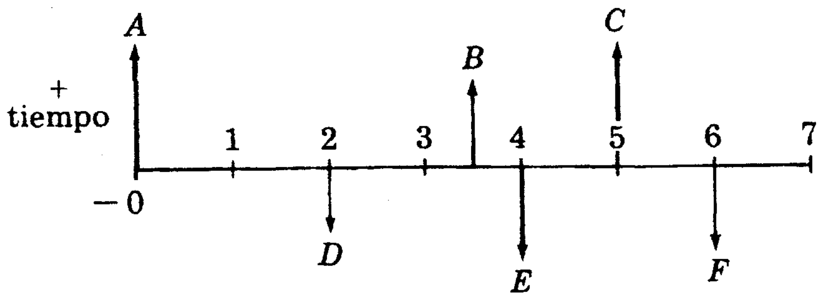
Diagramas de tiempo-valor y diagramas de flujo de caja Si colocamos en una línea de tiempos los valores en juego, se tiene un diagrama de tiempo-valor. Estos diagramas son de gran utilidad para el análisis de los problemas y permiten apreciaciones intuitivas; el lector debe familiarizarse con ellos ya que se utilizarán con frecuencia en este libro. En un diagrama, el tiempo puede medirse de dos maneras diferentes: en sentido positivo (de izquierda a derecha), si se tiene una fecha inicial y se habla de un valor futuro; en sentido negativo (de derecha a izquierda), si se tiene una fecha de vencimiento, o final, y se habla de un valor antes del vencimiento.

Diagramas de tiempo-valor



En evaluación de proyectos se utilizan, para guiar el análisis, los diagramas de flujo de caja que son similares a los diagramas de tiempo-valor; colocando en un diagrama de tiempo-valor, flechas hacia arriba para los ingresos en el instante en que se producen y flechas hacia abajo para los egresos se tiene un diagrama de flujo de caja.

Diagrama de flujo de caja



A, B y C ingresos (+)
D, E y F egresos (-)

La longitud y el grosor de las flechas son indicadores de la magnitud de los valores en juego.

Ejemplo 1.11 Hacer el diagrama de tiempo-valor para un monto de $ 20 400 al 6%. 30, 60, 90 y 120 días antes del vencimiento con descuento racional. Comparar este diagrama con el que corresponde a una deuda de $ 20 000 al 6%, calculando su valor 30, 60, 90 y 120 días después de la fecha inicial.

Diagrama para el monto de $20 400
Aplicando (9)

$$C = \frac{S}{1 + ni}$$

S = 20 400
i = 0,06

n = 30, 60, 90 y 120 días antes del vencimiento efectuando los cálculos se tiene

Tiempo	**120**	**90**	**60**	**30**	**← 0**
Valor	**$ 20 000**	**$ 20 098,52**	**$ 20 198,02**	**$ 20 298,51**	**$ 20 400 (monto)**

Diagrama para el capital inicial de $20 000

Aplicando (8) S = C (1 + ni)
C = $ 20000
i= 0,06

n = 30, 60, 90 y 120 días contados desde la fecha inicial efectuando los cálculos se tiene el diagrama

Tiempo	**0 →**	**30**	**60**	**90**	**120 días**
Valor	**$ 20 000**	**$ 20 100**	**$ 20 200**	**$ 20 300**	**$ 20 400**

Comparando ambos diagramas, se observa que el valor sólo es igual en las fechas inicial y final. Observe que la diferencia en una misma fecha por ejemplo, entre las cantidades 20 198,02 y 20 200 es igual a los intereses simples de 198,02 a la tasa dada y en el tiempo calculado para 20 198,02.

20 200 -20 198,02 = 1,98 que es igual a los intereses simples de 198,02 al 6% en 60 días.

$$198{,}02\ (^{1}/_{6})\ (0{,}06) = 1{,}98$$

El lector debe hacer el cálculo para las otras fechas.

1.11 CALCULO DE INTERESES POR MEDIO DE TABLAS

Un libro de tablas financieras contiene un conjunto de tablas, para el cálculo de diferentes tópicos financieros. Así, en ellas se encuentran tablas para el cálculo de intereses simple y compuesto y sus diferentes aplicaciones; tablas para el cálculo de seguros de vida; tablas para el cálculo y rendimiento de bonos y obligaciones, etc. En lo que se refiere al cálculo de interés simple, se encuentran tablas en circulación en cada país. Estas tablas suelen ser, a veces, muy extensas; por ejemplo, las tablas publicadas hace más de 50 años por Carlos L. Delbridge contienen, para diferentes tasas, el valor de los intereses desde 1 a 365 días, para capitales desde $ 0,01 hasta $ 200 000.

Según el criterio del autor, cada tabla tiene organizados sus datos en forma peculiar y ofrecen al lector una amplia información sobre sus usos y manejo, por lo que consideramos inoficioso describir en particular alguna de ellas.

Las diferentes empresas suelen preparar tablas para sus cálculos comerciales más frecuentes. Al establecer un sistema para sus cálculos financieros, una empresa debe tener en cuenta tres aspectos básicos: confiabilidad en los resultados, rapidez y costo operacional del sistema adoptado.

En los diferentes capítulos del libro, incluimos tablas, algunas de ellas sólo parciales, tales son las 1, 2, 3, 4 y 5 hasta este momento estudiadas. Este tipo de tablas son de importancia relativa y su uso no es de estricta necesidad; el objeto de ellas es lograr una mayor rapidez en el cálculo y mostrar al lector la posibilidad de preparar tablas similares, para aplicaciones específicas de cada empresa.

Al final del libro, presentarnos un conjunto de tablas que son básicas y de estricta necesidad para los cálculos; ellas se estudiarán en los siguientes capítulos.

1.12 GRAFICAS O DIAGRAMAS DEL INTERÉS SIMPLE

En un sistema de coordenadas rectangulares, la geometría analíticas nos enseñó que la ecuación Y = aX tiene por gráfica una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es a. Y que la ecuación Y = aX + b tiene por gráfica una recta de pendiente a que intercepta sobre el eje Y el segmento b.

Si en el sistema de coordenadas medimos sobre el eje Y el valor de los intereses simples y sobre el eje X, el tiempo, tendremos para un capital de una unidad, de acuerdo con (4)

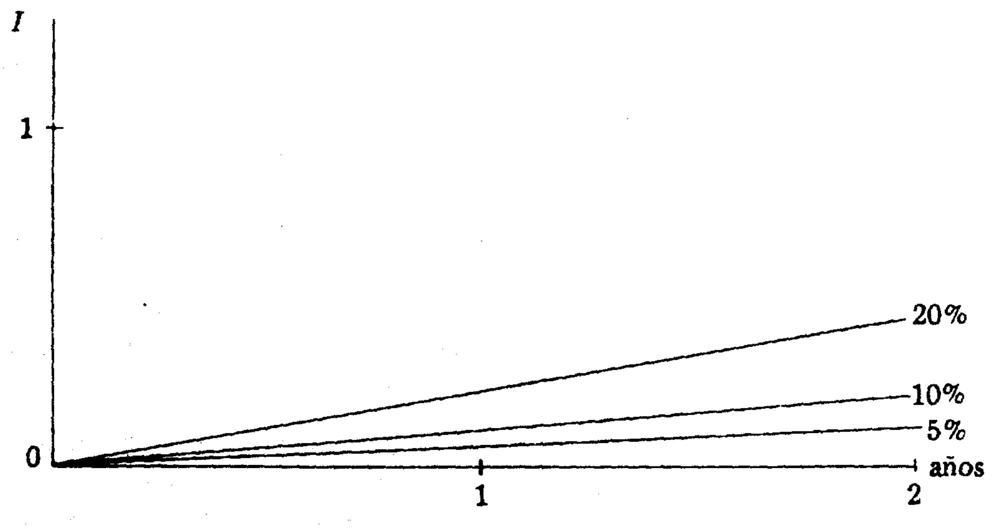
$$I = Cni$$

Para C = 1

$$I = ni = in$$

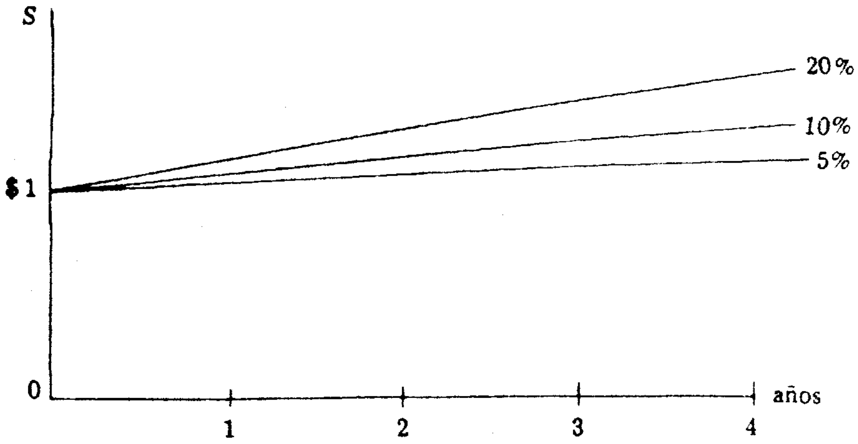
La gráfica de los valores de I en función del tiempo son rectas que pasan por el origen y que tienen por pendiente los valores de i.

Gráfica de los valores de 1= ni (para el 5%, 10% y 20%)



La fórmula (8) para el monto S = C(1 + ni) para C = $1 se convierte en S = 1 + ni. Si sobre el eje Y medimos los valores de S y sobre el eje X, el tiempo, se tiene la siguiente gráfica.

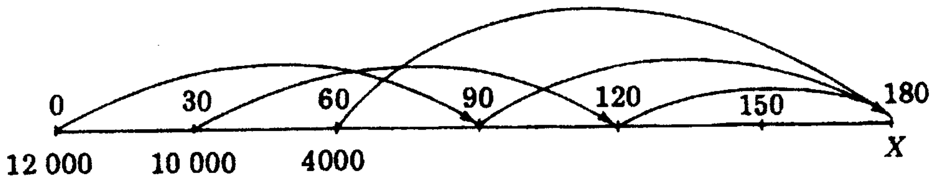
Gráfica de los valores del monto para un capital de $ 1 (al 5%, 10% y 20%)



1.13 ECUACIONES DE VALORES EQUIVALENTES

Un problema básico en las operaciones financieras es el de las inversiones equivalentes; es decir que, en valor y tiempo, produzcan el mismo resultado económico. Esto se expresa en ecuaciones de valores equivalentes.
Un mismo valor situado en fechas diferentes es, desde el punto de vista financiero, un valor diferente. Usted no debe olvidar que sólo se pueden sumar o restar o igualar dineros ubicados en una misma fecha.
Para decidir entre diferentes posibilidades financieras, es fundamental plantear las ecuaciones de valores equivalentes, para determinar por medio de ellas, cuál de las alternativas es la más conveniente. En los diferentes capítulos de este libro, el lector encontrará abundantes aplicaciones y ejemplos de este importante concepto; en nuestros ejemplos y problemas las tasas de interés son tasas internas, que es la tasa a que permanecen invertidos los dineros en juego; en la evaluación económica de proyectos de inversión surge el concepto de tasa de oportunidad que es una tasa externa básica para estudios de factibilidad, otra tasa externa importante en proyectos de Gobierno es la tasa de interés social. En este nivel de Matemáticas Financieras utilizaremos, en general, la tasa interna.

Ejemplo 1.12 En cierta fecha, una persona firma un pagaré por $12 000 a 90 días, al 8%; 30 días después, firmó otro pagaré por $10 000 a 90 días sin interés. 60 días después de la primera fecha, conviene con su acreedor en pagar $ 4000 y recoger los dos pagarés firmados remplazándolos con uno solo a 120 días, contados desde la última fecha, con un rendimiento del 9%. Determinar el pago único convenido.
Para plantear la ecuación, dibujemos primero el diagrama de tiempo-valor.



La fecha que se escoge para la equivalencia es llamada por algunos autores lecha focal; el nombre nos parece apropiado y lo utilizaremos en este libro.
La fijación de la fecha focal debe ser cuidadosamente analizada, ya que debe corresponder estrictamente a lo pactado en los pagarés. Los cambios de fecha focal producen variaciones en la determinación de las cantidades. En la sección 1.10, hicimos notar las diferencias de valores intermedios, siendo los valores inicial y final iguales en tiempos iguales y a una misma tasa.
Escogemos corno fecha focal 180 días, calculamos los distintos valores en esa fecha y formamos la ecuación de valores equivalentes entre los nuevos valores y los antiguos.

Nuevos valores: $X + 4000\left[1 + \frac{1}{3}(0{,}09)\right]$

Antiguos: $12\,000\left[1 + \frac{1}{4}(0{,}08)\right]\left[1 + \frac{1}{4}(0{,}09)\right] + 10\,000\left[1 + \frac{1}{6}(0{,}09)\right]$

Efectuando los cálculos y estableciendo la igualdad, se tiene

$$X + 4120 = 12\,515{,}40 + 10\,150$$
$$X = 12\,515{,}40 + 10\,150 - 4120$$
$$X = \$\,18\,545{,}40$$

El lector debe analizar este problema y resolverlo para otra fecha focal, por ejemplo 60 días que corresponde al instante del cambio de las condiciones. No debe olvidar que en un pagaré sin intereses hubo condiciones de origen que no se expresan en el propio documento.

1.14 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que el interés simple producido por un capital C, colocado durante n años a la tasa i es igual al interés simple. que produciría a la tasa proporcional $^{i}/_{m}$ colocado durante m • n períodos.
Interés simple en n períodos anuales a la tasa i

$$I_1 = Cni$$

Interés simple en nm períodos a la tasa $^{i}/_{m}$

$$I_2 = Cmn\ ^{i}/_{m}$$

$$I_2 = Cni$$

o sea $I_1 = I_2$

2. Calcular la tasa de interés simple proporcional mensual equivalente a la tasa del 9% anual.

$$i = \frac{0.09}{12} = 0{,}0075$$

3. Calcular el interés simple que produce un capital de $ 10 000 en 4 años al 6%.

$$I = Cni$$

$$C = \$\,10\ 000, \quad n = 4, \quad i = 0{,}06$$

$$I = (10\ 000)(4)(0{,}06)$$
$$I = \$\,2400$$

4. Calcular el interés simple que produce un capital de $10 000 en 3 años al 0,8% mensual.

$$I = Cni$$

$$C = \$\,10\ 000, \quad n = 3, \quad i = (0{,}008)(12) = 0{,}096$$
$$I = (10\ 000)(3)(0{,}096)$$
$$I = \$\,2880$$

Otra interpretación:

$$C = \$\,10\ 000, \quad n = (3)(12) = 36 \text{ períodos}, \quad i = 0{,}008$$

$$I = (10\ 000)(36)(0{,}008)$$
$$I = \$\,2880$$

5. ¿A qué tasa de interés el monto de $ 20 000 será $ 21 200, a interés simple, en 9 meses?

Aplicamos (8),

$$S = C(1 + ni)$$
$$S = 21\ 200$$
$$C = 20\ 000$$
$$n = 9 \text{ meses} = \frac{9}{12} = 0{,}75 \text{ años}$$

$$21\ 200 = 20\ 000(1 + 0{,}75i)$$

$$1 + 0{,}75i = \frac{212}{200}$$

$$0{,}75i = \frac{12}{200}$$

$$i = 0{,}08$$

$$\text{Tasa} = 8\%$$

6. El 10 de enero se firmó un pagaré de \$ 6000 con 9% de interés. ¿En qué fecha los intereses serán de \$ 359?

I=Cni
I= \$359; C= \$6000; i = 0,09
359 = 6000n(0,09)
n = 359 / 540 = 0,6648 años
(0,6648)(360) = 239 días

o, de otra forma, aplicando (2*a*), $I = \dfrac{Ctr}{36\,000}$

$$359 = \frac{(6000)(t)(9)}{36\,000}$$

$$t = \frac{(359)(36\,000)}{(6000)(9)}$$

$$t = 239 \text{ días}$$

Para determinar la fecha utilizamos la tabla 1. En la horizontal del mes de enero, encontramos el número 243; diferencia con 239 = 4, restamos 4 al día de la fecha inicial y tenemos la fecha final 6 de septiembre.

7. Un artículo vale \$1800 al contado. Un comprador conviene pagar \$ 800 de cuota inicial al contado y el resto a 60 días, con un recargo del 5% sobre el precio de contado. ¿Qué tasa de interés simple anual pagó?
Recargo por venta a plazos = (1800)(0,05) = 90

Recargo por venta a plazos **= (1800)(0,05) = 90**

$$I = \frac{Ctr}{36\,000}$$

$$I = 90; \quad C = 1800 - 800 = 1000; \quad t = 60\ ds$$

$$90 = \frac{(1000)(60)(r)}{36\,000}$$

$$r = \frac{(90)(36)}{60} = 54\%$$

la tasa anual de interés m 54%

8. ¿Qué suma debe ser invertida al 9% para tener $ 2000 dentro de 8 meses?

$$S = C(1 + ni)$$

$$S = 2000; \quad n = \frac{8}{12} \text{ año} = \frac{2}{3}; \quad i = 0{,}09$$

$$2000 = C\,[1 + \frac{2}{3}(0{,}09)]$$

$$2000 = C(1 + 0{,}06)$$

$$C = \frac{2000}{1{,}06} = 1886{,}79$$

Se debe invertir $ 1886.79

9. Siendo el rendimiento normal del dinero del 9%. ¿qué oferta es más conveniente por un terreno?
(a) $ 60 000 de contado.
(b) $ 20 000 al contado y el saldo en dos pagarés; uno de $10 000 a 90 días y otro de $ 32 000 a 180 días.

Calculemos el valor actual de los dos pagarés de la oferta (b)

$$C = \frac{S}{1 + ni}$$

$$S_1 = 10\,000; \quad n_1 = 90 \text{ días} = \frac{1}{4} \text{ año}; \quad i = 0{,}09$$

$$C_1 = \frac{10\,000}{1 + \frac{1}{4}(0{,}09)}$$

$$C_1 = \frac{40\,000}{4{,}09}$$

$$C_1 = 9779{,}95$$

$$S_2 = 32\,000; \quad n_2 = 180 \text{ días} = \frac{1}{2} \text{ año}; \quad i = 0{,}09$$

$$C_2 = \frac{32\,000}{1 + \frac{1}{2}(0{,}09)}$$

$$C_2 = \frac{64\ 000}{2{,}09}$$

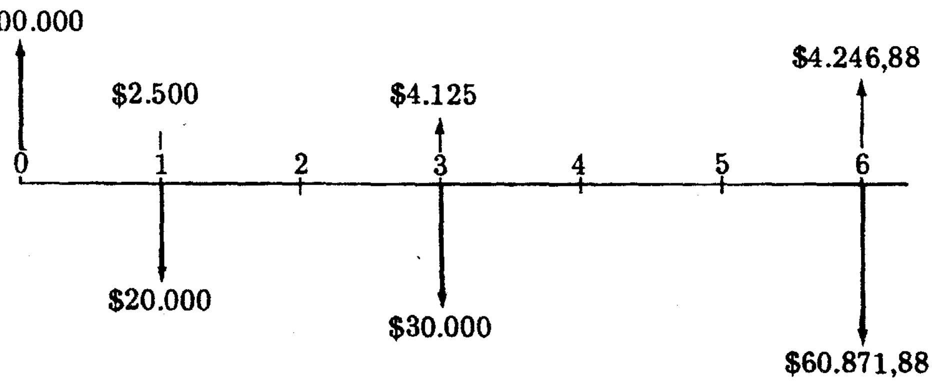
$$C_2 = 30\ 622{,}01$$

Valor de la oferta (b) = 20 000 + 9779.95 + 30 622.01 = $ 60 401.96

La oferta (b) es mejor por ser su valor actual superior en $ 401.96 a la oferta (a).

10. Una persona deposita $100.000 en una cuenta de una Corporación financiera que paga 30% de interés anual, transcurrido un mes retira $20.000 y dos meses después retira $30.000, a) Haga el diagrama del flujo de caja, b) Hallar el saldo disponible a los 6 meses contados desde la fecha del depósito y coloque en el diagrama los valores que obtenga.

(a)



(b) mes 1 $S_1 = \$100.000(1 + \frac{0{,}30}{12}) - 20.000 = 82.500$

mes 3 $S_3 = \$82.500\left[1 + 2\left(\frac{0{,}30}{12}\right)\right] - 30.000 = 56.625$

mes 6 $S_6 = \$56.625\left[1 + 3\left(\frac{0{,}30}{12}\right)\right] = 60.871{,}88$

DESCUENTO BANCARIO, DESCUENTOS Y COMISIONES, DESCUENTOS EN CADENAS Y TASAS ESCALONADAS

El objetivo de este capítulo es enseñar al estudiante los conceptos básicos en las operaciones bancarias y comerciales tales como intereses, descuentos y comisiones. Al terminar el capítulo deberá ser capaz de reconocer en un problema el tipo de descuento y aplicar los métodos matemáticos para calcular; descuentos bancarios, descuento racional, montos, comisiones, descuentos sobre facturas comerciales con o sin tasas escalonadas.

DESCUENTO BANCARIO, DESCUENTOS Y COMISIONES, DESCUENTOS EN CADENAS Y TASAS ESCALONADAS

DESCUENTO BANCARIO

Desde tiempos muy antiguos, se ha implantado la costumbre de cobrar los intereses por adelantado sobre el valor de los pagarés,.calculándolos sobre el valor anotado en dichos documentos. Esto, además de permitir al prestamista disponer de inmediato del dinero correspondiente a los intereses, le da un mayor rendimiento que la tasa señalada en la operación.

El descuento bancario es el que se utiliza en todas las operaciones comerciales y, por ello, al hablar de descuento, se entiende que es el descuento bancario, salvo que se exprese que es descuento racional o de otra forma convencional.

Para estas operaciones, se usan ciertas expresiones léxicas que es necesario conocer.

Valor nominal de un pagaré El valor nominal de un pagaré es el que está inscrito en la obligación; para el comercio, es el capital. Si el pagaré no gana intereses, el valor nominal indica la cantidad que debe pagarse en la fecha de vencimiento señalada.

Descontar un pagaré Es la acción de recibir o pagar hoy un dinero, a cambio de una suma mayor comprometida para fecha futura, bajo las condiciones convenidas en el pagaré. Al referirse a la operación, el término descontar lo usan tanto el prestatario como el prestamista.
Un pagaré como un bien mobiliario puede ser vendido, es decir descontado, una o más veces antes de la fecha de su vencimiento y cada comprador descuenta el pagaré por el tiempo que falta para su vencimiento. Cuando la operación se efectúa entre bancos, toma el nombre de redescuento.

Descuento Es la diferencia entre el valor nominal y el valor que se recibe, en el momento de descontar el pagaré.

Valor efectivo o líquido de un pagaré Es el valor nominal menos el descuento. Es el valor en dinero que se recibe en el momento de descontar la obligación o, en otras palabras, es el valor actual o presente con descuento bancario.

Tipo o tasa de descuento Es el tanto por ciento de descuento, o sea, el porcentaje del valor nominal que deduce el prestamista, al descontar el pagaré.

Plazo Es el término que se utiliza para expresar el período de duración del préstamo. Los pagarés son obligaciones a corto plazo y el descuento bancario simple nunca se efectúa para períodos mayores de un año.

FORMULA
PARA EL CALCULO DEL DESCUENTO BANCARIO

Sean : S = valor del pagaré; n = tiempo expresado en años; d = tanto por ciento (tasa de descuento).

Aplicando (4)

$$I = Cni$$

Remplazando se tiene $D = Snd$ (11)

Ejemplo 2.1 Un pagaré por $ 68 000 vence el 18 de septiembre; se descuenta el 20 de junio al 10%. Calcular el valor descontado y el valor líquido del pagaré.

El tiempo que falta para el vencimiento es de 90 días, $n = 1/4$ año; $S = 68\ 000$; $d = 0,1$

$$D = Snd = (68\ 000)(1/\ 4)(0,1)$$

$$D = \$1700$$

Valor líquido = S - D = 68 000 - 1700 Valor líquido = \$ 66 300

El valor líquido C es el valor actual del pagaré y, por lo tanto, igual al valor nominal S, menos el descuento:

$$C = S - D$$

$$D = Snd \qquad \text{(fórmula (11))}$$

Sustituyendo

$$C = S - Snd$$

$$C = S(1 - nd) \qquad (12)$$

Ejemplo 2.2 Un pagaré por \$ 22 000 se descuenta 120 días antes de su vencimiento. Calcular su valor líquido, si el descuento se hace al 9%.

$$C = \$\,22\,000; \quad n = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \text{ año}; \quad d = 0{,}09$$

$$C = S(1 - nd)$$

$$C = (22\,000)(1 - \frac{1}{3}(0{,}09) = (22\,000)(1 - 0{,}03)$$

$$C = (22\,000)(0{,}97)$$

$$C = \$\,21\,340$$

Sea un pagaré de valor nominal S y su tasa de interés i. Designando por C_r el valor actual con descuento racional en el tiempo n antes del vencimiento, y por C_b , el valor líquido con descuento bancario en el mismo tiempo y con la misma tasa para el descuento, tendremos:

$$C_r = \frac{S}{1 + ni} \qquad \text{(fórmula (9))}$$

$$C_b = S(1 - ni)$$

(fórmula *(12)*, en la cual $d = i$)

$$\frac{C_r}{C_b} = \frac{\frac{S}{1 + ni}}{S(1 - ni)}$$

$$\frac{C_r}{C_b} = \frac{1}{(1 + ni)(1 - ni)} = \frac{1}{1 - (ni)^2}$$

$$C_b = C_r[1 - (ni)^2]$$

Esta última expresión indica que en tiempos iguales y a una misma tasa, el valor liquido con descuento racional es siempre mayor, que el valor liquido con descuento bancario.

Ejemplo 2.3 Calcular los valores actuales, con descuento racional y con descuento bancario, de un pagaré de \$14 000 descontado 180 días antes de su vencimiento, con una tasa del 8%.

$$S = 14\,000; \quad n = \frac{180}{360} = \frac{1}{2} \text{ año}; \quad i = d = 8\%$$

$$C_r = \frac{S}{1 + ni} = \frac{14\,000}{1 + (1/2)(0{,}08)} = \frac{14\,000}{1 + 0{,}04}$$

$$C_r = \$13\,461{,}54 \text{ (descuento racional)}$$

$$C_b = S(1 - nd) = 14\,000[1 - 1/2(0{,}08)]$$

$$C_b = 14\,000(1 - 0{,}04) = 14\,000(0{,}96)$$

$$C_b = \$13\,440 \text{ (descuento bancario)}$$

Cuando un pagaré no es cancelado en la fecha señalada para su vencimiento, entra a ganar intereses llamados intereses de mora que se calculan sobre el valor nominal por el tiempo que se retrasa el pago, a una tasa de interés que se fija al firmar el pagaré. Los intereses de mora se calculan aplicando las fórmulas ya estudiadas y, para el monto, la fórmula (8), que es la que corresponde a un pagaré con intereses.

Ejemplo 2.4 Calcular el monto de un pagaré de \$14 000 cancelado 38 días después de su vencimiento, si los intereses de mora se fijaron en el 12%.

Se aplica la fórmula (8), $S = C(1 + ni)$ que da el monto para un pagaré que gana intereses.

$$S = 14\,000; \quad n = \frac{38}{360} = 0{,}1055555 \text{ años}; \quad i = 0{,}12$$

$$S = C(1 + ni) = 14\,000[1 + (0{,}1055555)(0{,}12)]$$

$$S = 14\,000(1 + 0{,}01266666) = 14\,000(1{,}01266666)$$

$$S = \$14\,177{,}33$$

Las comisiones son cantidades de dinero que se pagan o cobran por la prestación de un servicio. La comisión se expresa en tanto por ciento y en su valor no interviene el tiempo. De esta manera, si para la venta de algún bien se conviene con el vendedor una comisión del 5%, esto significa que se pagará al vendedor la suma de 5 unidades de dinero, por cada 100 unidades del valor de la venta.

Sean: \$ C el valor sobre el cual se ha de pagar una comisión r el % de comisión fijado

$$i = \frac{r}{100} \text{ tanto por uno}$$

$$\text{comisión} = Ci \qquad (13)$$

Los Bancos en sus préstamos, además de la tasa de descuento cobran valores tales como comisiones, gastos bancarios, seguros e impuestos; estos valores que se agregan al descuento, disminuyen el valor efectivo del pagaré y como consecuencia resulta más alta la tasa de interés de la operación. Vea el ejercicio resuelto No. 8 y los ejercicios propuestos 16 y 27 de este capítulo.

En el comercio, es costumbre ofrecer una rebaja sobre el precio de lista por alguna razón; por ejemplo: promociones especiales de venta; por compras al por mayor; por pronto pago y por otras causas que sería inoficioso enumerar.

Los descuentos tales como las comisiones se expresan en tanto por ciento y en su valor no interviene el tiempo. Sea r% el descuento que por alguna razón se concede sobre alguna factura de valor $S. Siendo í el tanto por uno, se tiene:

$$\text{descuento} = D = Si \qquad (13a)$$

El valor neto de la factura es igual al valor facturado, menos el descuento.

Sean: S = monto facturado o valor de la factura
C = valor neto de la factura
d = tanto por ciento de descuento; $i = {}^{d}/_{100}$ tanto por uno de descuento
$C = S - D = S - Si$
$C = S(1 - i)$ (14)

Ejemplo 2.5 Calcular el valor neto a pagar por una factura de \$ 7000, sobre la que se concede un descuento del 4%.

S = \$ 7000; i = 0,04
C = S(1— i) = (7000)(1— 0,04) = (7000)(0,96)
C = \$ 6720

2.10 DESCUENTOS POR PRONTO PAGO

El comercio mayorista acostumbra ofrecer descuentos por pronto pago, que permiten al comprador escoger su forma de pago, entre varias alternativas, según el tiempo en que anticipen el pago sobre el plazo que expresa la lista de precios del mayorista.
Si un mayorista indica sus precios con plazos de pago de 60 días, esto significa que el comprador queda obligado a pagar a los 60 días contados desde la fecha de la factura; sobre el precio facturado, se ofrecen los descuentos por pronto pago. Es costumbre indicar los descuentos por medio de fracciones cuyo numerador indica el tanto por ciento de descuento y cuyo denominador indica el tiempo dentro del cual el comprador tiene la opción de pagar, para tener derecho al descuento que señala el denominador. Por ejemplo: un comerciante factura el primero de marzo $100 000 con las condiciones siguientes: neto a 60 días; $^{4}/_{30}$, $^{6}/_{15}$; 8% al contado.

Esto significa que:
Por pago al contado contra factura, se paga con el 8% de descuento o sea $ 92 000.
Por pago a 15 días plazo o sea el 15 de marzo, se paga la factura con el 6% de descuento, es decir, $ 94 000.
Por pago a 30 días plazo o sea el lo. de abril, se paga con el 4 %de descuento, es decir, $ 96 000.

2.11 DESCUENTOS EN CADENA O EN SERIE

Con frecuencia, ocurre que, sobre una misma factura, se hacen va ríos descuentos por diferentes razones independientes entre sí. Estos descuentos sucesivos reciben el nombre de descuentos en cadena o serie. Por ser los descuentos independientes, cada uno de ellos se efectúa sobre el valor neto de la factura, después de deducir el descuento anterior. Por ejemplo, sobre una factura de $ 50 000 se conceden los siguientes descuentos:

(a) Por compra al por mayor	8%
(b j Por promoción especial de ventas	5%
(c) Por despachos sin empaques	6%

Estos descuentos en cadena operan así :

Valor neto de Factura	% Descuento	Valor neto de la factura
$ 50 000	8%	$ 46 000
$ 46 000	5%	$ 43 700
$ 43 700	6%	$ 41 078

Valor neto a pagar = $ 41 078

Descuento comercial único equivalente a varios descuentos en cadena Sean los descuentos d_1 , d_2 , d_3 , ... , d_n , que se conceden en cadena, sobre una misma factura.

El valor neto es dado por la fórmula (14), $C = S(1 - i)$, en la que i es el tanto por uno correspondiente al descuento d %. Designando por C_k el valor neto después de aplicado el descuento d_k, tendremos:

Valor neto de la factura	% Descuento	Valor neto de la factura
S	d_1	$C_1 = S(1 - i_1)$
C_1	d_2	$C_2 = C_1(1 - i_2) = S(1 - i_1)(1 - i_2)$
C_2	d_3	$C_3 = C_2(1 - i_3) = S(1 - i_1)(1 - i_2)(1 - i_3)$
.	.	. .
.	.	. .
.	.	. .
C_{n-1}	d_n	$C_n = C_{n-1}(1 - i_n) = S(1 - i_1)\ldots(1 - i_n)$

Sustituyendo los diferentes valores netos en la cadena se tiene:

$$C_n = S(1 - i_1)(1 - i_2)\ldots(1 - i_n) \qquad (15)$$

Del análisis de esta última expresión se deduce, por ser el producto una operación conmutativa, que: el orden en que se efectúen los descuentos en cadena no altera el valor neto final.

Para calcular el descuento único equivalente a una cadena de descuentos, establecemos la ecuación de equivalencia entre los valores netos de una factura de \$ 1, con descuentos en cadena. Sea i el tanto por uno equivalente ala cadena $i_1, i_2, \ldots, i_n$, tendremos:

Para $S = \$\,1{,}00$. $\quad 1{,}00 - i =$ valor neto con descuento único

$C_n = 1{,}00(1 - i_1)(1 - i_2)\ldots(1 - i_n) =$ valor neto con descuento en cadena

O sea $\quad 1{,}00 - i = (1 - i_1)(1 - i_2)\ldots(1 - i_n)$

$$i = 1 - (1 - i_1)(1 - i_2)\ldots(1 - i_n) \qquad (16)$$

Ejemplo 2.6 Calcular el valor neto de una factura de \$ 10 000 con los descuentos en cadena del 6%, 8% y 4% y calcular el descuento equivalente único.

Aplicamos la fórmula *(15)*, $C_n = S(1 - i_1)(1 - i_2)\ldots(1 - i_n)$

$i_1 = 0{,}06$

$i_2 = 0,08$
$i_3 = 0,04$
$C_3 = 10\ 000(1 - 0,06)(1 - 0,08)(1- 0,04)$
$C_3 = 10\ 000(0,94)(0,92)(0,96)$
$C_3 = 10\ 000(0,830208)$
valor neto = C = $ 8302,08

El descuento equivalente único es según la fórmula (16)
$i = 1 - (1 — 0,06)(1 — 0,08)(1 — 0,04) = 1 — (0,94)(0,92)(0,96)$
$i =1— 0,830208$
descuento único = i = 0,169792; d = 16,9792%.

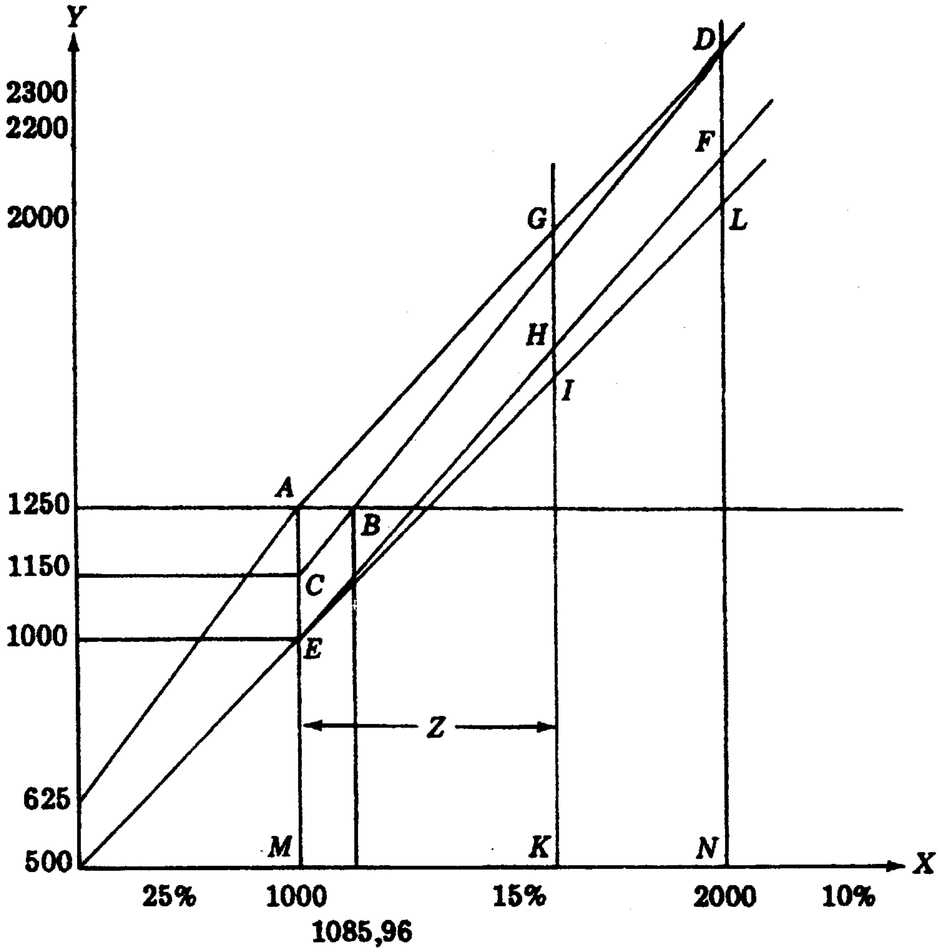
2.12 TASAS ESCALONADAS

Tasas escalonadas son aquellas en las que los tipos de interés que se aplican varían de acuerdo con algún criterio preestablecido.
Por ejemplo: una empresa concede 'aumentos de salario, de acuerdo con la siguiente escala:

Salarios de $ 500 a $ 1000	25% de aumento
Salarios de $1001 a $ 2000	15% de aumento
Salarios de $ 2001 en adelante	10% de aumento

Con las tasas escalonadas de aumento sucede que, en la vecindad de los valores en que se produce la variación de la tasa, se origina una situación de inversión en la categoría de los empleados. Suele ocurrir que, después del aumento, los empleados de cierta categoría quedan con un sueldo superior al de otros empleados que eran, antes del aumento, sus superiores en categoría de sueldos.
La mejor manera de analizar estos problemas es por medio de una gráfica. En el eje de las abscisas, colocamos los sueldos antes del aumento y en el eje de las ordenadas, el monto de los sueldos después del aumento. Así, para nuestro ejemplo tendremos: (Véase gráfico pág. 50).

Trazando por el punto A la paralela al eje X, se encuentra el punto B sobre la recta CD, cuya ordenada corresponde al nuevo sueldo en la escala 1001 a 2000 que es igual al nuevo sueldo del que ganaba $1000. Trazando por el punto B la paralela al eje Y, se encuentra, en el eje X, el correspondiente sueldo, antes del aumento; para calcularlo, planteamos la ecuación de equivalencia entre los montos:



$$(1000)(1 + 0{,}25) = (1001 + x)(1 + 0{,}15)$$

$$1250 = 1151{,}15 + 1{,}15x$$

$$98{,}95 = 1{,}15x$$

$$x = 85{,}96$$

Sumando \$1001 a x que es el límite inferior, se obtiene el sueldo de \$ 1086,96. Un empleado que ganaba \$1086,96, al incrementar su sueldo en un 15%, queda ganando \$1250, que es también el nuevo sueldo de los empleados que ganaban \$ 1000. La gráfica muestra que todos los empleados que ganaban sueldos comprendidos entre \$1001 y \$ 1086,96 quedan, después del aumento, con un sueldo inferior al nuevo sueldo de los que ganaban \$ 1000.
El mismo análisis se hace para otros puntos de la escala de tasas variables.

2.13 MODIFICACION DE LAS TASAS ESCALONADAS PARA EVITAR LA INVERSION DE LAS CATEGORIAS DE VALORES

La inversión se evita modificando la pendiente de las rectas que en cada tramo permiten determinar el monto del nuevo sueldo. En la gráfica de nuestro ejemplo, los montos de los nuevos sueldos que-dan definidos por las ordenadas de la recta CD, para la escala 1001 a 2000. Trasladando el extremo C hasta que coincida con A, se evita la inversión de las categorías de sueldos, con un mínimo de variación en los mismos. Estos nuevos sueldos quedan determina-dos por las ordenadas de la recta AD.

En la gráfica, se trazó la función idéntica L. Sobre esta recta que pasa por el origen, se encuentran los puntos cuyas ordenadas son iguales a las abscisas, y se trazó la recta EF paralela a AD. Para un sueldo que exceda los $ 1000 en la cantidad z, su nuevo monto en escala modificada corresponde a la ordenada KG que puede expresarse por:

$$KG=KI+IH+HG$$
$$KI = 1000 + z$$
$$HG = EA = 250$$

HI se deduce de la proporción $\frac{FL}{HI} = \frac{MN}{MK}$ en donde $FL = DL - DF = 300 - 250 = 50$; $MN = 1000$; $MK = z$; remplazando se tiene

$$\frac{50}{HI} = \frac{1000}{z}$$

$$HI = z\frac{50}{1000} = 0{,}05z, \text{ sustituyendo se tiene}$$

$$KG = (1000 + z) + 250 + 0{,}05z$$

Generalizando el desarrollo anterior para un intervalo de cualquier tasa escalonada, puede enunciarse:

El nuevo valor es igual al antiguo más una suma fija y más un porcentaje fijo del exceso, con relación al extremo inferior del intervalo. La suma fija es igual al aumento del sueldo en el extremo inferior del intervalo y el porcentaje fijo es igual a la razón entre la diferencia de los aumentos en los extremos del intervalo y el intervalo.

Para nuestro caso y para los dos primeros intervalos, se enunciaría: los sueldos comprendidos entre $ 500 y $1000 se aumentan en 25%. Los sueldos comprendidos entre $ 1001 y $ 2060 se aumentan en $ 250 más el 5% del exceso del sueldo sobre 1000.

Una aplicación importante de las tasas escalonadas se encuentra en las escalas de tributación de impuestos de renta, catastrales y otros.

Ejemplo 2.7 Una empresa concede aumentos a sus trabajadores, de acuerdo con la siguiente escala:

Sueldos hasta $1000, 22% de aumento
Sueldos desde $1001 hasta 3000, 10%
Sueldos desde $ 3001 en adelante, 5%

Calcular la escala modificada, para evitar la inversión de las categorías de sueldos.

para el intervalo 1000 a 3000 tenemos

aumento en el extremo inferior	=	220
aumento en el extremo superior	=	300
diferencia en los extremos	=	80
valor del intervalo	=	2000

$$i = \frac{80}{2000} = 0{,}04$$

suma fija = aumento en el extremo inferior = 220

Para el intervalo de $1000 a $ 3000, el aumento sería de $ 220 más el 4% del exceso del sueldo sobre $1000.
Para el intervalo de $ 3000 en adelante, la modificación se hace con relación al sueldo más alto del intervalo; por ejemplo sí éste es de $ 8000, se toma su valor como extremo superior del intervalo, y así, se tiene:

aumento en el extremo inferior	=	300
aumento en el extremo superior	=	400
diferencia en los extremos	=	100
valor del intervalo	=	5000

$$i = \frac{100}{5000} = 0{,}02$$

Para este intervalo, el aumento será de $ 300, más el 2% del exceso del sueldo sobre $ 3000. En consecuencia, la escala modificada quedará: sueldos hasta $1000 aumentan en el 22%
sueldos desde $ 1001 hasta $ 3000 aumentan en $ 220, más el 4% del exceso del sueldo sobre $ 1000
sueldos desde $ 3001 aumentan en $ 300, más el 2% del exceso del sueldo sobre $ 3000.
De acuerdo con lo comentado en L2 en la mayoría de los problemas indicamos la tasa de rendimiento sin incluir la tasa de corrección monetaria,

esto con el objeto de evitar confusiones. Veamos, por ejemplo, lo que sucede con un préstamo de $100.000 a un año plazo con la tasa del 30% (22% de corrección y 8% de interés). Aplicando el 30% el prestamista recibiría $130.00 recuperando el capital inicial que con corrección es $122.000 y $8.000 c intereses, suma que es inferior al 8% pactado. Lo correcto es aplicar primero la corrección al capital y luego calcular la tasa de rendimiento, así se tiene:

Capital con corrección del 22%	$122.00
Más 8% de interés = 122.000 x 0.08 =	+ 9.760
Valor que debe cancelar el deudor	$131.760

Para comparar rendimiento de opciones diferentes en un mismo momento se puede, bajo las mismas condiciones de desvalorización, manejar en un solo % la corrección y la tasa de interés, pero en general no es aconsejable hacerlo. En el capítulo 18 presentamos el estudio de la devaluación monetaria y lo métodos de corrección de su valor.

2.14 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un inversionista descuenta dos pagarés en un banco que cobra el 9% de interés simple por adelantado: uno de valor nominal $ 15 000 a 90 días y otro de $ 10 000 a 60 días; hallar el valor efectivo que recibe.

$$C = S(1 - nd)$$

Primer pagaré:

$$S_1 = \$15\,000; \quad n_1 = \frac{90}{360}; \quad d = 0{,}09$$

Segundo pagaré:

$$S_2 = \$10\,000; \quad n_2 = \frac{60}{360}; \quad d = 0{,}09$$

$$C = S_1(1 - n_1 d) + S_2(1 - n_2 d)$$

$$C = (15\,000)\left[1 - \left(\frac{90}{360}\right)(0{,}09)\right] +$$

$$(10\,000)\left[1 - \left(\frac{60}{360}\right)(0{,}09)\right]$$

$$C = \$24\,512{,}50$$

2. Un inversionista presta una suma de dinero a un cliente mediante un pagaré cuyo valor nominal es $ 60 000 con vencimiento a 150 días, que descuenta cargando el 12% de intereses por adelantado. 40 días después descuenta el pagaré en un banco que carga el 9% de intereses por adelantado, hallar:

(a) la suma que recibe el cliente
(b) la suma que en la operación comercial gana el inversionista
(c) la suma que descuenta el banco

(a) $C = S(1 - nd)$

$$S = 60\,000; \quad n = \frac{150}{330}; \quad d = 0{,}12$$

$$C_1 = (60\,000)\left[1 - \left(\frac{150}{360}\right)(0{,}12)\right]$$

$$C_1 = \$57\,000$$

(b) $C = S(1 - nd)$

$$S = 60\,000; \quad n = \frac{110}{360}; \quad d = 0{,}09$$

$$C_2 = (60\,000)\left[1 - \left(\frac{110}{360}\right)(0{,}09)\right]$$

$$C_2 = \$58\,350$$

$$C_2 - C_1 = \$58\,350 - \$57\,000 = \$1350$$

Respuesta $1350.

(c) $D = Snd$

$$S = 60\,000; \quad n = \frac{110}{360}; \quad d = 0{,}09$$

$$D = (60\,000)\left(\frac{110}{360}\right)(0{,}09)$$

$$D = \$1650$$

3. Un pagaré a 120 días por $ 30 000 que gana intereses del 10% se negocia en un banco que descuenta al 8% de intereses por adelantado; hallar el valor efectivo que se recibe del banco.

Primero, se calcula el monto del pagaré a su vencimiento y, luego, se calcula el descuento sobre ese monto.

$$S = C(1 + ni)$$

$$C = \$30\,000; \quad n = \frac{120}{360}; \quad i = 0{,}10$$

$$S = (30\,000)\left[1 + \left(\frac{120}{360}\right)(0{,}10)\right]$$

$$S = \$31\,000$$

Sobre el monto de $ 31 000 del pagaré, a su vencimiento, se calcula el valor efectivo en la operación de descuento.

$$C = S(1 - nd)$$

$$S = \$31\,000; \quad n = \frac{120}{360}; \quad d = 0{,}08$$

$$C = (31\,000)\left[1 - \left(\frac{120}{360}\right)(0{,}08)\right]$$

$$C = \$30\,173{,}33$$

4. Hallar el descuento racional de un pagaré de $ 20 000, al 8%, con vencimiento a 60 días. Comparar el descuento racional con el descuento bancario con la misma tasa de interés simple.

$$C = \frac{S}{1 + ni}$$

$$S = \$20\,000; \quad n = \frac{60}{360}; \quad i = 0{,}08$$

$$C = \frac{20\,000}{1 + (\frac{60}{360})(0{,}08)}$$

$$C = \$19\,736{,}84$$

5. Determinar la fecha en que fue descontado un pagaré de $ 6000 con vencimiento el 21 de mayo, si se recibieron $ 5940 con descuento bancario del 9%.

$$C = S(1 - nd)$$

$$C = 5940; \quad S = 6000; \quad d = 0{,}09$$

$$5940 = 6000[1 - n(0{,}09)]$$

$$\frac{5940}{6000} = 1 - 0{,}09n$$

$$0{,}09n = 0{,}01$$

$$n = \frac{1}{9} \text{ año}$$

$$n = \frac{1}{9}(360) = 40 \text{ días}$$

El pagaré fue descontado el 11 de abril.

6. Calcular la tasa de interés simple i equivalente al tipo de descuento bancario d.

El valor C recibido con descuento bancario es dado por:

$$C=S(1-nd)$$

El capital C, más sus intereses a la tasa i, debe dar en el mismo tiempo el monto S o sea:

$$C(1+ni)=S$$

sustituyendo se tiene:

$$C = C(1 + ni)(1 - nd)$$

$$1 = (1 + ni)(1 - nd)$$

$$(1 + ni) = \frac{1}{1-nd}$$

$$ni = \frac{1}{1-nd} - 1 = \frac{nd}{1-nd}$$

$i = \dfrac{d}{1-nd}$ **tasa de interés simple equivalente al tipo de descuento bancario** ***d***.

7. Utilizando el resultado del problema anterior, calcular la tasa de interés simple i, equivalente al tipo de descuento bancario del 10%: (a) 360 días, (b) 120 días, (c) 90 días, (d) 60 días, antes del vencimiento.

$$i = \frac{d}{1-nd}$$

(a) $n = 360 \text{ días} = 1 \text{ año}, \quad d = 0{,}1$

$$i = \frac{0{,}1}{1-0{,}1} = \frac{0{,}1}{0{,}9} = \frac{1}{9} = 0{,}1111$$

Tasa de interés simple: 11,11%

(*b*) $n = 120 \text{ días} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \text{ años}$

$$i = \frac{0,1}{1 - (1/3)(0,1)} = \frac{3}{29} = 0,1034$$

Tasa de interés simple: 10,34%

(*c*) $n = 90 \text{ días} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} \text{ año}$

$$i = \frac{0,1}{1 - (1/4)(0,1)} = \frac{4}{39} = 0,1026$$

Tasa de interés simple: 10,26%

(*d*) $n = 60 \text{ días} = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} \text{ año}$

$$i = \frac{0,1}{1 - (1/6)(0,1)} = \frac{6}{59} = 0,1017$$

Tasa de interés simple: 10,17%

8. (a) Calcular el valor efectivo que se recibe al descontar un pagaré de $ 5000, 120 días antes del vencimiento, si el banco cobra además $ 5 por gastos bancarios y el 2 por mil por concepto de impuestos de timbres, sobre el pagaré. Tasa de descuento 9%. (b) Calcular la tasa de interés simple equivalente al descuento efectuado.

(*a*) $C = S(1 - nd)$

$$n = 120 \text{ días} = \frac{1}{3} \text{ año}; \quad S = 5000; \quad d = 0,09$$

$$C = 5000[1 - (\tfrac{1}{3})(0,09)] = (5000)(0,97)$$

$C =$		4850
menos:		
gastos bancarios	**$ 5**	
2 por mil sobre 5000	**$ 10**	**15**
valor efectivo recibido		**$ 4835**

(*b*) $4835\,[1 + (\frac{1}{3})i] = 5000$

$$1 + (\frac{1}{3})i = \frac{5000}{4835}$$

$$(\frac{1}{3})i = \frac{5000}{4835} - 1 = \frac{165}{4835}$$

$$i = \frac{495}{4835} = 0{,}1024$$

Tasa de interés simple: 10,24%

9. Sesenta días antes de su vencimiento, un inversionista descuenta en un banco un pagaré de $ 20 000 que gana intereses del 10% y que fue firmado a 90 días. Calcular el valor efectivo que recibe el inversionista, si la tasa de descuento es del 9%.

Primero se calcula el monto del pagaré en la fecha de su vencimiento.

$$S = C(1 + ni)$$

$$C = \$\,20\,000; \quad n = 90 \text{ días} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} \text{ año}; \quad i = 0{,}10$$

$$S = 20\,000\,[1 + (\frac{1}{4})(0{,}10)] = 20\,000(1{,}025)$$

$$\text{monto} = S = \$\,20\,500$$

El descuento lo hace el banco sobre $ 20 500 que corresponde al valor nominal, por 60 días a la tasa de descuento del 9%.

$$C = S(1 - nd)$$

$$S = 20\,500; \quad n = 60 \text{ días} = \frac{1}{6} \text{ año}; \quad d = 0{,}09$$

$$C = 20\,500\,[1 - (\frac{1}{6})(0{,}09)] = 20\,500(1 - 0{,}015)$$

$$C = 20\,500(0{,}985)$$

$$C = \$\,20\,192{,}50$$

10. Una empresa debe a su banco los siguientes pagarés descontados, con la tasa del 9% de descuento y el 12% de interés en caso de mora:

(a) $ 20 000 con vencimiento el 31 de agosto
(b) $ 60 000 con vencimiento el 30 de septiembre

PAGOS PARCIALES
Y VENTAS A CRÉDITO
DE CORTO PLAZO

En las actividades comerciales, es frecuente la costumbre de utilizar obligaciones en las que se aceptan pagos parciales o abonos a buena cuenta, dentro del plazo de la obligación, en lugar de un solo pago en la fecha de su vencimiento.
En la solución de los problemas en los que intervienen obligaciones y sus intereses, se supone que todo dinero que se recibe o paga, por cualquier concepto, continúa en el proceso financiero dentro del mismo juego de intereses, hasta la extinción de la obligación.

En este tipo de obligaciones se presentan varias alternativas y el análisis y cálculo de los valores en juego deberán hacerse de acuerdo con las costumbres locales.
Para comprender los aspectos teóricos de los pagos parciales de una obligación, estudiaremos primero el pago de intereses en fracciones del plazo de la deuda.

PAGOS PARCIALES
Y VENTAS A CRÉDITO
DE CORTO PLAZO

OBJETIVO

El objetivo de este capítulo es enseñar al estudiante los fundamentos matemáticos de los pagarés con intereses, de las ventas a plazo y de la cancelación de deudas mediante pagos parciales. Al terminar el capítulo el estudiante deberá ser capaz de calcular intereses efectivos en deudas con abonos parciales, intereses en las diferentes modalidades de ventas a plazo y podrá diseñar planes de ventas a plazo.

Analicemos lo que ocurre con un pagaré de \$100 que gana intereses del 8%, con vencimiento a un año plazo, y que obliga al deudor a pagar los intereses por trimestres vencidos.

3.2 PAGARE EN FRACCIONES DEL PLAZO DE LA DEUDA

El diagrama de tiempo-valor nos muestra, para nuestro ejemplo, la fecha de pago de los intereses y el valor de estos.

PLAZO DE LA DEUDA

Tiempo	**0**	**3**	**6**	**9**	**12 meses**
Intereses		**$2**	**$2**	**$2**	**$2**

Fijando la fecha focal en la fecha de vencimiento del pagaré, tendremos que los intereses pagados al final de cada trimestre ganan intereses, a la misma tasa del pagaré, hasta la fecha de vencimiento. Calculando los montos en la fecha focal y designándolos sucesivamente por S_1,, S_2, ... , S_n, se tiene:

$$S = C(1 + ni)$$

fórmula general del monto, en la cual $C = \$ 2;\ i = 0{,}08$

$$\text{para } n = 9 \text{ meses} = {}^3\!/_4 \text{ año } S_1 = 2\,[1 + ({}^3\!/_4)(0{,}08)] = 2(1 + 0{,}06) = \$ 2{,}12$$

$$\text{para } n = 6 \text{ meses} = {}^1\!/_2 \text{ año } S_2 = 2\,[1 + ({}^1\!/_2)(0{,}08)] = 2(1 + 0{,}04) = \$ 2{,}08$$

$$\text{para } n = 3 \text{ meses} = {}^1\!/_4 \text{ año } S_3 = 2\,[1 + ({}^1\!/_4)(0{,}08)] = 2(1 + 0{,}02) = \$ 2{,}04$$

En la fecha del vencimiento, el deudor deberá pagar el valor del pagaré más los intereses del último trimestre o sea $ 102; agregando a este valor los montos S_1 , S_2 y S_3, se tiene el monto en la fecha focal

$$S = 102 + 2{,}12 + 2{,}08 + 2{,}04$$

$$S = \$ 108{,}24$$

Este monto final muestra que los intereses corresponden a un pagaré de $100 a la tasa efectiva del 8,24%, que es mayor que la tasa nominal del pagaré.

3.3 DESCUENTO BANCARIO CON PAGOS ANTICIPADOS DE LOS INTERESES EN FRACCIONES DEL PLAZO

En el descuento bancario, son frecuentes las obligaciones que obligan al deudor al pago anticipado de los intereses, por tiempos que son fracciones del plazo de la deuda.

Sea por ejemplo un pagaré de $100 a 12 meses de plazo con pago de intereses al 8 % anual por trimestre anticipado. En la fecha inicial, el deudor recibe el valor efectivo descontando en el primer trimestre.

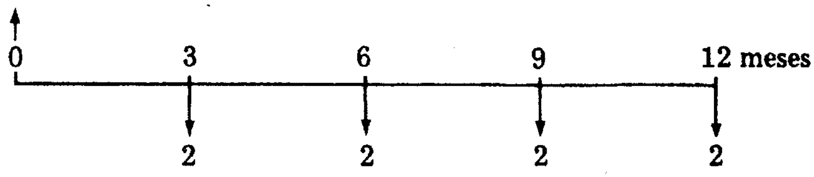
$$C = S(1 - nd)$$

$$S = \$\,100; \quad n = 3 \text{ meses} = \frac{1}{4} \text{ año}; \quad d = 0{,}08$$

$$C = 100\,[1 - (\frac{1}{4})(0{,}08)] = 100(1 - 0{,}02) = 100(0{,}98)$$

$$C = \$\,98$$

Para nuestro ejemplo, el diagrama de flujo de caja nos muestra las fechas de pago de los intereses y sus valores.



Los intereses que debe pagar el deudor en fecha futura, al principio de cada trimestre, son obligaciones que, dentro del mismo juego de descuento bancario a la tasa fijada, es posible calcularles su valor efectivo en la fecha inicial.

$$C = S(1 - nd)$$

$$S = \$\,2; \quad n = 3 \text{ meses} = \frac{1}{4} \text{ año}; \quad d = 0{,}08$$

$$C = 2\,[1 - (\frac{1}{4})(0{,}08)] = 2(1 - 0{,}02) = 2(0{,}98)$$

Designando por C_1 $\qquad C_1 = \$\,1{,}96$

Para $n = 6$ meses $= \frac{1}{2}$ año $C = 2\,[1 - (\frac{1}{2})(0{,}08)] =$

$$2(1 - 0{,}04) = 2(0{,}96)$$

Designando por C_2 $\qquad C_2 = \$\,1{,}92$

Para $n = 9$ meses $= \frac{3}{4}$ año $C = 2\,[1 - (\frac{3}{4})(0{,}08)] =$

$$2(1 - 0{,}06) = 2(0{,}94)$$

Designando por C_3 $\qquad C_3 = \$\,1{,}88$

El valor de los intereses calculados por descuento bancario en la fecha inicial tienen un valor D = $ 2 + $C_1 + C_2 + C_3$

$$D = \$2 + \$1,96 + \$1,92 + \$1,88$$

$$D = \$7,76$$

Este resultado nos muestra que la tasa real de descuento es de 7,76, que es menor que la tasa nominal del 8% señalada en el pagaré.

Para comparar las tasas efectivas de interés de deudas con pagos anticipados y deudas con pagos vencidos de intereses vea los problemas resueltos 1, 2, 3 y 4 de este capítulo.

Las fórmulas estudiadas en los capítulos anteriores son suficientes para resolver estos problemas y no consideramos necesario desarrollar fórmulas de aplicación general. Por otra parte, en los capítulos dedicados al estudio del interés compuesto, se encontrarán métodos para resolver este tipo de problemas bajo otros puntos de vista.

3.4 PAGOS PARCIALES

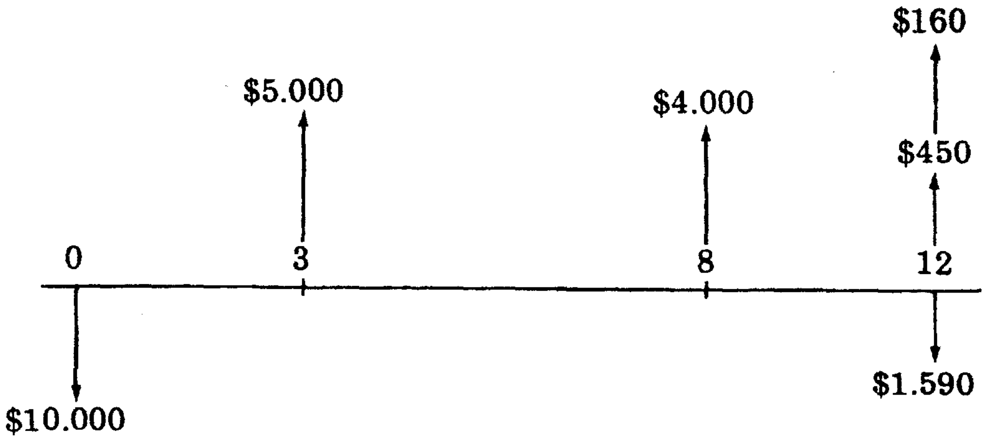
Para el tratamiento de las obligaciones que permiten pagos parciales o abonos dentro del período o plazo de la obligación, en lugar de un solo pago en la fecha de su vencimiento, hay diferentes criterios; nos referiremos a los dos más importantes y de más frecuente aplicación. En todo caso, al estudiar el interés compuesto, se verán métodos más generales para este tipo de problemas.

Regla comercial Esta regla indica que, para los pagarés que ganan intereses, deben calcularse en la fecha de vencimiento, independientemente, los montos de la obligación y de los diferentes abonos. La cantidad por liquidaren esa fecha es la diferencia entre el monto de la obligación y la suma de los montos de los diferentes abonos.

Sea S el monto de la deuda en la fecha de vencimiento y $S_1, S_2, \ldots, S_n$ los montos de los distintos abonos en la misma fecha y sea X la cantidad por liquidar. De acuerdo con la regla comercial, la ecuación de equivalencia es:

$$X = S - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$$

Ejemplo 3.1 Sobre una obligación de $10 000 a un año de plazo con intereses del 12%, el deudor hace los siguientes abonos: $ 5000 a los tres meses y $ 4000 a los 8 meses. Calcular, aplicando la regla comercial, el saldo por pagar en la fecha de vencimiento.



Designando por S el monto de la deuda y por S_1 y S_2 los respectivos montos de los abonos, en la fecha de vencimiento, se tiene:

$$S = C(1 + ni)$$

$$C = 10\,000; \quad n = 1 \text{ año}; \quad i = 0{,}12$$

$$S = 10\,000(1 + 0{,}12) = 10\,000(1{,}12)$$

$$S = \$\,11\,200$$

$$C = 5000; \quad n = 9 \text{ meses} = \frac{3}{4} \text{ años}$$

$$S_1 = 5000\,[1 + (\frac{3}{4})(0{,}12)] = 5000(1 + 0{,}09) = 5000(1{,}09)$$

$$S_1 = \$\,5450$$

$$C = 4000; \quad n = 4 \text{ meses} = \frac{1}{3} \text{ año}; \quad i = 0{,}12$$

$$S_2 = 4000\,[1 + (\frac{1}{3})(0{,}12)] = 4000(1 + 0{,}04) = 4000(1{,}04)$$

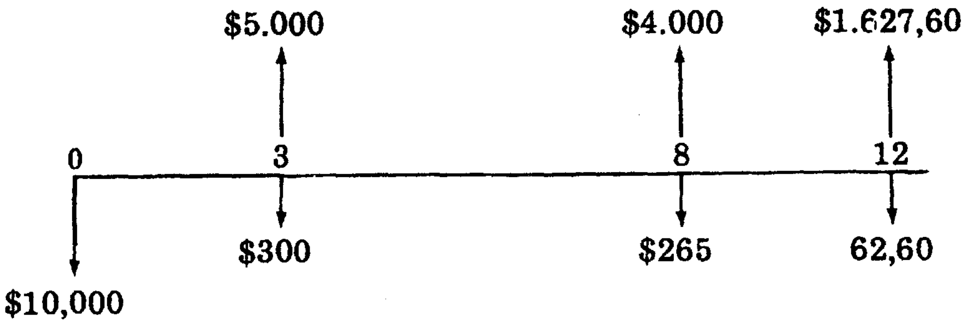
$$S_2 = \$\,4160$$

$$X = S - (S_1 + S_2) = 11\,200 - (5450 + 4160)$$

$$X = \$\,1590$$

Regla de los saldos insolutos Esta regla para los pagarés que ganan intereses indica: cada vez que se hace un abono debe calcularse el monto de la deuda hasta la fecha del abono y restar a ese monto el valor del abono; así se obtiene el saldo insoluto en esa fecha. Los pagos parciales deben ser mayores que los intereses de la deuda, hasta la fecha de pago.

Ejemplo 3.2 Aplicando la regla de los saldos insolutos, calcular el saldo por pagar en la fecha de vencimiento para la obligación del ejemplo 3.1.



Monto de la deuda a los 3 meses $= 10\,000\,[1 + (\frac{1}{4})(0,12]$

$= 10\,000(1 + 0,03) = 10\,000(1,03)$

$= \$\,10\,300$

Menos primer abono $-5\,000$

Saldo insoluto de los 3 meses $\$\ 5\,300$

Monto del saldo a los 8 meses:

$$C = 5300;\quad n = 5 \text{ meses} = \frac{5}{12} \text{ año};\quad i = 0,12$$

$$= 5300\,[1 + (\frac{5}{12})(0,12)]$$

$$= 5300(1 + 0,05) = 5300(1,05)$$

$$= 5565$$

Menos segundo abono -4000

Saldo insoluto a los 8 meses $\$\,1565$

Sobre el saldo insoluto en la fecha del último abono, se calcula el monto en la fecha del vencimiento.

$$C = \$\,1565;\quad n = 4 \text{ meses} = \frac{1}{3} \text{ año},\quad i = 0,12$$

$$S = X = 1565\,[1 + (\frac{1}{3})(0,12)] = 1565(1 + 0,04) = 1565(1,04)$$

$$X = \$\,1627,60$$

Comparando los resultados obtenidos en los ejemplos 3.1 y 3.2, se ve que el saldo por pagar en la fecha de vencimiento resulta mayor, al aplicar la regla de los saldos insolutos. Esto se debe a que al aplicar esta regla, el prestamista entra a ganar intereses sobre los intereses capitalizados, en cada fecha de los pagos parciales.

Si un deudor de una obligación con intereses del 12% a un año de plazo, hace abonos mensuales, aplicando la regla de los saldos insolutos, se le cobra sobre saldos el 1% mensual con capitalización mensual, es decir, intereses compuestos y no simples.

3.5 VENTAS A PLAZOS

No obstante que el análisis de los problemas derivados de las compraventas a plazos es tratado en los capítulos que corresponden al estudio del interés compuesto, estimamos que, por su gran aplicación en comercio, conviene analizar en este capítulo algunos aspectos de los sistemas que se acostumbra aplicar en este tipo de ventas.
Sobre el precio al contado, el comerciante carga una suma adicional por venta a plazos; parte de esta suma es por intereses sobre la deuda que contrae el comprador y otra parte es para cubrir el mayor costo que significa la venta a plazos. Entre estos costos, están los gastos de contabilidad, cobranzas, investigación de créditos, gastos legales, deudas incobrables y otros.
Para el comprador, el sobreprecio que paga son los intereses de la deuda que contrae por la compra a plazos. Es costumbre comercial considerar el sobreprecio como intereses.

Ventas a plazos con cargo de intereses sobre saldos Esta modalidad es de aplicación poco frecuente y consiste en pagar la deuda por medio de cuotas iguales, a las que se suman los intereses sobre el saldo de la deuda a una tasa convenida.

Ejemplo 3.3 Alguien compra artículos electrodomésticos por valor de \$ 8000 y conviene en pagar \$ 2000 al contado y el saldo en 4 cuotas de \$ 1500 mensuales, c/u con el 2% mensual de intereses.

Valor de la compra	\$ 8000	
menos pago de contado	\$ 2000	
Saldo		\$ 6000
Primera cuota	\$1500	
más 2% sobre 6000	\$ 120	
Valor del primer pago	\$1620	
Saldo		\$ 4500
Segunda cuota	\$1500	
más 2% sobre 4500	\$ 90	
Valor del segundo pago	\$1590	
Saldo		\$ 3000
Tercera cuota	\$1500	
más 2% sobre 3000	\$ 60	
Valor tercer pago	\$1560	

Saldo		$1500
Cuarta cuota	$1500	
más 2% sobre 1500	$ 30	
Valor cuarto pago	$1530	
Saldo		000

Ventas a plazos con pagos periódicos iguales En el comercio, la costumbre más general para las ventas a plazos es la modalidad de pagos periódicos iguales. Para determinar el valor de estos pagos periódicos o cuotas, se procede así: al precio de contado se le hace un cargo adicional por venta a plazos. De este valor, se resta la cuota inicial y el saldo se divide por el número de pagos convenidos.

$$\text{valor cuota} = \frac{(\text{precio de contado} + \text{adición}) - \text{cuota inicial}}{\text{número de pagos}}$$

ordenando en otra forma el numerador se tiene

$$\text{valor cuota} = \frac{(\text{precio de contado} - \text{cuota inicial}) + \text{adición}}{\text{número de pagos}}$$

$$(\text{precio de contado} - \text{cuota inicial}) = \text{saldo insoluto}$$

O sea que, en realidad, la adición se hace al saldo insoluto y el valor de la cuota es:

$$\text{valor cuota} = \frac{\text{saldo insoluto} + \text{adición}}{\text{número de pagos}}$$

3.6 TASA DE INTERES EN VENTAS A PLAZOS

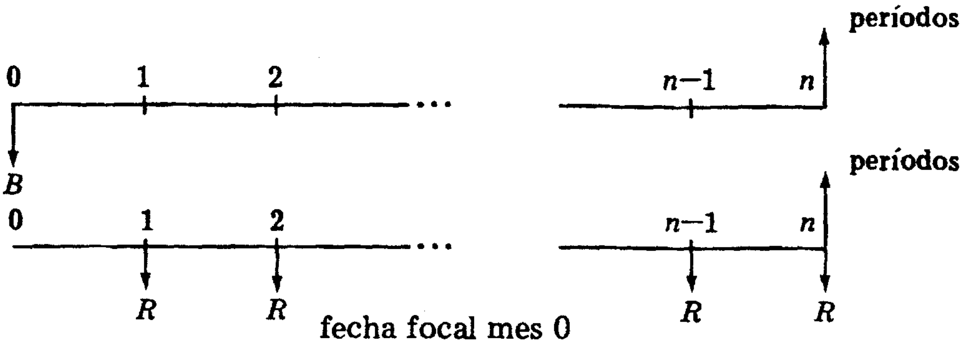
Para calcular la tasa de interés anual cargada en la transacción, debemos fijar algunos conceptos y dar algunas definiciones.

B = saldo insoluto = valor de contado — pago inicial
I = cargo adicional o intereses
n = número de pagos excluyendo el pago inicial
R = valor del pago periódico
m = número de períodos o plazos contenidos en un año
i = tasa anual de interés expresada en tanto por ciento

$$\frac{n}{m} = \text{tiempo expresado en años}$$

Por definición, $I = Rn - B$

Tasa de interés según la recia comercial De acuerdo con la regla comercial para pagos parciales estudiada en el párrafo 3.4, se escoge como fecha focal la fecha de vencimiento de la obligación. Para el caso de ventas a plazos, es la fecha de pago de la última cuota de la compra a plazos.



Cada período de pago es igual a 1/ m año; el tanto por uno de interés en cada período es igual a $^{1}/_{m}$ í. El monto del saldo insoluto inicial y la suma de los montos de los pagos parciales, en la fecha focal, deben ser iguales.

$$B\left(1+\frac{n}{m}i\right)=R\left(1+\frac{n-1}{m}i\right)+R\left(1+\frac{n-2}{m}i\right)+\dots$$

$$+R\left(1+\frac{2}{m}i\right)+R\left(1+\frac{1}{m}i\right)+R$$

$$B+B\frac{n}{m}i=nR+R\frac{i}{m}[(n-1)+(n-2)+\dots+2+1]$$

La expresión encerrada en el paréntesis es la progresión aritmética formada por los (n — 1) primeros números naturales y su

suma es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$; sustituyendo tenemos:

$$B+B\frac{n}{m}i=nR+\frac{R(n-1)ni}{2m}$$

$$B\frac{n}{m}i\;\frac{R(n-1)ni}{2m}=nR-B=I \quad \text{Cargo adicional o intereses}$$

$$[2nB-R(n-1)n]i=2mI$$

$$i=\frac{2mI}{2nB-Rn^2+Rn} \quad \text{sustituyendo } Rn=I+B \text{ se tiene}$$

$$i=\frac{2mI}{2nB-(I+B)n+I+B}=\frac{2mI}{nB+B-nI+I}$$

o sea

$$i = \frac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)} \qquad (17)$$

Ejemplo 3.4 Una nevera de \$ 6500 precio de contado; se vende a plazos mediante un pago inicial de \$1200 y el saldo en 6 cuotas mensuales de \$1000 c/u. Calcular la tasa de interés cargada.

saldo insoluto =B = 6500 — 1200 = \$ 5300

cargo por intereses = I= Rn —B = 6(1000) — 5300 = 6000 — 5300

I= 700

número de pagos = n = 6; período de pago =1 mes de donde m = 12

sustituyendo tenemos:

$$i = \frac{2(12)(700)}{5300(6+1) - 700(6-1)} = \frac{16\,800}{37\,100 - 3500}$$

$$i = 0{,}50$$

Tasa = 50%

Ejemplo 3.5 En la venta a plazos del ejemplo anterior, el comerciante desea cargar intereses a la tasa del 30%. Calcular: (a) El cargo que debe adicionar al precio de contado, para obtener su precio de venta a plazos. (b) La cuota mensual

(a) $$i = 0{,}30 = \frac{2(12)(I)}{5300(7) - I(5)} = \frac{24I}{37\,100 - 5I}$$

$$11\,130 - 1{,}5I = 24I$$

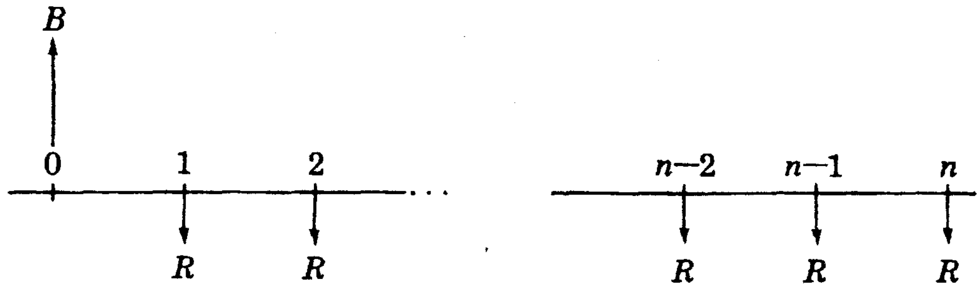
$$25{,}5I = 11\,130$$

$$I = \frac{11\,130}{25{,}5}$$

$$I = \$436{,}47$$

(b) **valor cuotas** $$= \frac{5300 + 436{,}47}{6} = \$956{,}08$$

Tasa de descuento bancario en ventas a plazos Considerando el saldo insoluto B como el valor efectivo o actual de los pagos futuros o cuotas de las ventas a plazos. Se tiene por n pagos de valor R, en períodos de tiempo igual a $^1/_m$ de año, a la tasa de descuento d.



fecha focal mes 0

$$B = R(1 - \frac{1}{m}d) + R(1 - \frac{2}{m}d) + \ldots$$

$$+ R(1 - \frac{n-1}{m}d) + R(1 - \frac{n}{m}d)$$

$$B = nR - \frac{R}{m}d\,[1 + 2 + \ldots + (n-1) + n]$$

La suma de los términos encerrados en el paréntesis es igual a

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$$B = nR - \frac{R}{m}d\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\frac{R}{m}d\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = nR - B = I$$ cargo adicional por ventas a plazos

despejando d $$d = \frac{2mI}{Rn(n+1)} \qquad (18)$$

Ejemplo 3.6 Calcular la tasa de descuento bancario, en la venta a plazos del ejemplo 3.4.

m =12; n = 6; R = 1000; I= 6(1000) -- 5300 = 700

sustituyendo en (18) se tiene:

$$d = \frac{2(12)(700)}{1000(6)(6+1)}$$

$$d = \frac{16\,800}{42\,000}$$

$$d = 0{,}40$$

Tasa de descuento = 40%.

Ejemplo 3.7 En el ejemplo 3.6, el comerciante desea cargar la tasa de descuento del 24%. Calcular el cargo que debe adicionar al precio de contado, para obtener su precio de ventas a plazos.

$$d = \frac{2mI}{Rn(n+1)}$$

$$d = 0{,}24; \quad m = 12; \quad n = 6; \quad R = 1000$$

$$0{,}24 = \frac{2(12)(I)}{1000(6)(6+1)}$$

$$0{,}24 = \frac{24(I)}{42\,000}$$

$$24I = 10\,080$$

$$I = \frac{10\,080}{24}$$

$$I = \$\,420$$

Tasa de interés según la regla de los saldos insolutos El cálculo de los intereses con aplicación de esta regla se estudiará en los capítulos del interés compuesto, junto con otros métodos generales.

En algunos textos, se dan otras fórmulas para cálculos aproximados de la tasa cargada en operaciones de ventas a plazos; ninguna de ellas tiene validez. Una de las más utilizadas es la llamada de razón constante que no corresponde a ninguno de los criterios que se aplican en matemáticas financieras. Para su deducción, se supone arbitrariamente que los pagos R se descomponen en dos sumandos que se aplican, independientemente, uno de ellos, al pago del saldo insoluto y el otro, al pago de los intereses.

de $I = Rn - B$ se despeja R y se tiene

$$R = \frac{B}{n} + \frac{I}{n}$$

El nombre de razón constante se refiere a que la razón entre B/n e I/n es la misma que entre B e 1; lo que no es ninguna novedad ni tiene relación alguna con el problema mismo. Para la deducción de la fórmula, se supone que los saldos insolutos son los términos de la secuencia, después de cada pago.

$$B,\ (B - \frac{B}{n}),\ (B - \frac{2B}{n}), \ldots \quad \left\{B - \frac{(n-1)B}{n}\right\}$$

$$I = \frac{i}{m}\left[B + (B - \frac{B}{n}) + (B - \frac{2B}{n}) + \ldots + \left\{B - \frac{(n-1)B}{n}\right\}\right]$$

$$I = \frac{i}{m} B\left[n - \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right]$$

$$I = \frac{i}{m} B\left[n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$I = \frac{iB(n+1)}{2m}$$

$$i = \frac{2mI}{B(n+1)} \quad \textbf{Fórmula de razón constante}$$

El lector debe analizar, cuidadosamente, esta fórmula cuya aplicación está bastante difundida, no obstante estar mal concebida, y sacar sus propias conclusiones sobre ésta y otras fórmulas que se encuentran en uso en el comercio.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un inversionista presta $ 20 000 a un cliente, a un año de plazo, mediante un pagaré que gana el 10% de intereses simples, quedando obligado el deudor a cancelar los intereses por trimestre vencido. Hallar la tasa de interés real cobrado.
Los pagos trimestrales de intereses se incorporan al juego financiero bajo sus mismas reglas, que son las de ganar intereses del 10%.

Cálculo de los intereses trimestrales

$$I = Cni$$

$$C = 20\,000;\ n = \frac{1}{4};\ \ i = 0{,}10$$

$$I = (20\,000)(\frac{1}{4})(0{,}10)$$

$$I = \$500$$

Cada pago de intereses gana, a su vez, intereses hasta la fecha de vencimiento del pagaré.

$$S = C(1 + ni)$$

Primer pago. $C = 500;\ n = \frac{3}{4};\ i = 0{,}10$

$$S_1 = (500)\left[1 + (\frac{3}{4})(0{,}1)\right] = \qquad \$\ \ 537{,}50$$

Segundo pago. $C = 500;\ n = \frac{1}{2};\ i = 0{,}10$

$$S_2 = (500)\left[1 + (\frac{1}{2})(0{,}1)\right] = \qquad \$ \quad 525{,}00$$

Tercer pago. $C = 500;\ n = \frac{1}{4};\ i = 0{,}10$

$$S_3 = (500)\left[1 + (\frac{1}{4})(0{,}1)\right] = \qquad \$ \quad 512{,}50$$

Cuarto y último pago. $C = 500;\ n = 0;\ i = 0{,}10$

$$S_4 = (500)\left[1 + (0)(0{,}1)\right] = \qquad \$ \quad 500{,}00$$

Monto de los intereses al vencimiento del pagaré **$ 2 075,00**

$$i = \frac{I}{Cn}$$

$$I = 2\,075;\ C = 20\,000;\ n = 1$$

$$i = \frac{2\,075}{20\,000} = 0{,}10375$$

Tasa efectiva de interés = 10,375%

2. En el problema anterior, ¿cuál es la tasa de interés, si los intereses se cobran por anticipado?
En este caso, lo único que varía es el tiempo durante el cual los intereses ganan, a su vez, intereses

$$S = C(1 + ni)$$

Primer pago. $C = 500;\ n = 1;\ i = 0{,}10$

$$S_1 = (500)\,[1 + (1)(0{,}1)] = \qquad \$ \quad 550{,}00$$

Segundo pago. $S_2 = S_1$ **del problema No. 1** = **$ 537,50**

Tercer pago. $S_3 = S_2$ **del problema No. 1** = **$ 525,00**

Cuarto pago. $S_4 = S_3$ **del problema No. 1** = **$ 512,50**

Monto de los intereses al vencimiento del pagaré **$ 2 125,00**

$$i = \frac{I}{Cn}$$

$$I = 2\,125;\ C = 20\,000;\ n = 1$$

$$i = \frac{2\,125}{20\,000} = 0{,}10625$$

Tasa efectiva de interés = 10,625%

3. Un banco descuenta un pagaré de \$ 100 000 a 18 meses plazo con intereses del 12 % anual, pagaderos por semestres anticipados. Hallar la tasa efectiva de descuento bancario cobrado por el banco.

Es necesario calcular el valor efectivo en la fecha inicial de cada pago de intereses, en el mismo juego financiero de descuento al 12%. Primero, calculamos el valor de los pagos semestrales, por concepto de intereses.

$$I = Cni$$

$$C = 100\,000; \quad n = \frac{1}{2}; \quad i = 0{,}12$$

$$I = (100\,000)(\frac{1}{2})(0{,}12)$$

$$I = \$6000$$

Luego, calculamos el valor efectivo de los intereses en la fecha inicial, en el juego financiero de descuento bancario al 12%.

$$C = S(1 - nd)$$

Primer pago de intereses, en la fecha inicial

$C_1 =$ **\$ 6 000,00**

Segundo pago. $S = 6000; \quad n = \frac{1}{2}; \quad d = 0{,}12$

$C_2 = (6000)\left[1 - (\frac{1}{2})(0{,}12)\right] =$ **\$ 5 640,00**

Tercer pago. $S = 6000; \quad n = 1; \quad d = 0{,}12$

$C_3 = (6000)\left[1 - (1)(0{,}12)\right] =$ **\$ 5 280,00**

Suman **\$ 16 920,00**

El descuento efectivo en la fecha inicial es de \$ 16 920,00

$$D = Cnd$$

$$D = 16\,920; \quad C = 100\,000; \quad n = \frac{3}{2}$$

$$d = \frac{D}{Cn}$$

$$d = \frac{16\,920}{(100\,000)(\frac{3}{2})} = 0{,}1128$$

Tasa de descuento efectivo = 11,28%

4. Una persona firma un pagaré de \$ 50 000 a 6 meses plazo, con intereses del 9%. Antes del vencimiento, efectúa los siguientes abonos: \$10 000 al mes y \$ 20 000 a los cuatro meses de firmado el pagaré. Hallar el saldo que debe pagar al vencimiento, aplicando : (a) la regla comercial, (b) la regla de los saldos insolutos.

(a) Regla comercial. En la fecha de vencimiento deben calcularse los montos de la obligación y de los abonos

$$S = C\,(1 + ni)$$

Monto de la obligación. $C = 50\,000;\ n = \frac{1}{2};\ i = 0{,}09$

$$S = (50\,000)\,[1 + (\frac{1}{2})(0{,}09)]$$

$$S = \$52\,250$$

Monto de los abonos. $C = 10\,000;\ n = \frac{5}{12};\ i = 0{,}09$

$$S_1 = (10\,000)\,[1 + (\frac{5}{12})(0{,}09)]$$

$$S_1 = \$10\,375$$

$$C = 20\,000;\ n = \frac{1}{6},\ i = 0{,}09$$

$$S_2 = (20\,000)\,[1 + (\frac{1}{6})(0{,}09)]$$

$$S_2 = \$20\,300$$

Saldo insoluto $= S - S_1 - S_2$

$$= 52\,250 - 10\,375 - 20\,300$$

Saldo de vencimiento $= \$21\,575$

(b) Regla de los saldos insolutos. Cada vez que se hace un abono, se calcula el monto de la deuda en la fecha del abono y se le resta el abono.

$$S = C(1 + ni)$$

$$C = 50\,000;\quad n = \frac{1}{12};\quad i = 0{,}09$$

$S = (50\,000)\left[1 + \left(\frac{1}{12}\right)(0{,}09)\right] =$	**$ 50 375,00**
Menos primer abono	**$ 10 000,00**
Saldo	**$ 40 375,00**

$$C = 40\,375;\quad n = \frac{1}{4};\quad i = 0{,}09$$

$S = (40\,375)\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)(0{,}09)\right] =$	**$ 41 283,44**
Menos segundo abono	**$ 20 000,00**
Saldo	**$ 21 283,44**

$$C = 21\,283{,}44;\quad n = \frac{1}{6};\quad i = 0{,}09$$

$$S = (21\,283{,}44)\left[1 + \left(\frac{1}{6}\right)(0{,}09)\right] = \quad \$\,21\,602{,}69$$

Saldo al vencimiento = $ 21 602,69

5. Un comerciante acostumbra a aumentar el precio de venta de contado en 10% para ventas con plazos hasta seis meses y en 15%, para plazos entre 6 meses y un año. Cobra una cuota inicial igual a las cuotas a pagar en los plazos. Dos clientes, A y B, compran cada uno artículos por el mismo valor de $ 6000. A lo compra a 5 meses plazo y B, a 10 meses plazo con pagos mensuales. Para ambas compras, calcular la cuota mensual y la tasa de interés cargada en la transacción, aplican-do la regla comercial.

$$A \qquad i = \frac{2mI}{B(n + 1) - I(n - 1)}$$

$$I = 6000(0{,}10) = 600;\quad n = 5;\quad m = 12;\quad R = \frac{6600}{6} = 1100$$

B = precio de contado menos cuota inicial = 6000 − 1100 = 4900

$$i = \frac{2(600)(12)}{4900(6) - 600(4)} = \frac{14\,400}{27\,000}$$

$$i = 0{,}5333$$

Tasa = 53,33%

$B \quad I = 6000(0{,}15) = 900; \quad n = 10; \quad m = 12;$ **valor cuotas =**

$$R = \frac{6900}{11} = 627{,}27$$

$$B = 6000 - 627{,}27 = 5372{,}73$$

$$i = \frac{2(12)(900)}{5372{,}73(11) - 900(9)} = \frac{21\,600}{51\,000{,}13}$$

$$i = 0{,}423$$

Tasa = 42,3%

6. Una tienda ofrece cortinas en $7800 con una cuota inicial de $ 1000 y el saldo en 18 cuotas quincenales de $ 396 c/u. Calcular la tasa de interés cargada en la venta, según la regla comercial.

$B = 7800 - 1000 = 6800; \quad I = 396(18) - 6800 = 328; \quad n = 18;$
$m = 24$

$$i = \frac{2(24)(328)}{6800(19) - 328(17)} = \frac{15\,744}{123\,624}$$

$$i = 0{,}127$$

Tasa = 12,7%

7. Un comerciante vende televisores a $ 4500; para promover sus ventas, los ofrece a crédito para pagar en 12 cuotas mensuales de $400 c/u y recibe la primera, como cuota inicial. Calcular la tasa de descuento bancario de la transacción.

$$d = \frac{2mI}{Rn(n+1)}$$

$R = 400; \quad B = 4500 - 400 = 4100; \quad m = 12, \quad n = 11; \quad I =$
$400(11) - 4100 = 300$

$$d = \frac{2(12)(300)}{400(11)(12)} = \frac{7200}{52\,800}$$

$$d = 0{,}136$$

Tasa de descuento = 13,6 %

8 Un comerciante ofrece máquinas de coser tipo industrial en $12 800. Si la compra es al contado, rebaja 10% de este valor. A plazos, la ofrece pagadera en 18 mensualidades, pero aumenta el valor en $ 2183 y exige una cuota inicial de $ 2532. Calcular la tasa cargada en la venta, de acuerdo con la regla comercial.

En este problema, el precio de venta de $12 800 es un precio ficticio señalado por el comerciante, para cumplir con una ley que no le permite cargar en ventas a plazos más del 2% mensual, sobre saldos insolutos.

Saldo insoluto B es igual al precio de contado, menos la cuota inicial.

Valor de contado = 12 800(0,9) = $ 11 520

B = 11 520 -2532 = 8988

El comerciante calcula el valor de las cuotas mensuales sobre el precio ficticio de $12 800, más un cargo de ventas a plazos, menos la cuota inicial.

$$R = \frac{12\,800 + 2183 - 2532}{18} = \frac{12\,451}{18}$$

$$R = \$691{,}72$$

$$n = 18; \quad m = 12; \quad I = 691{,}72(18) - 8988 = 3463$$

$$i = \frac{2mI}{B(n+1) - I(n-1)}$$

$$i = \frac{2(12)(3463)}{8988(19) - 3463(17)} = \frac{83\,112}{111\,901}$$

$$i = 0{,}743$$

Tasa = 74,3%

El comerciante sostiene que su precio de venta es $12 800 y que el saldo insoluto debe calcularse sobre ese valor y calcula la tasa así:

$$n = 18; \quad m = 12; \quad B = 12\,800 - 2532 = 10\,268; \quad I = 691{,}72(18) - 10\,268 = 2183$$

$$i = \frac{2(12)(2183)}{10\,268(19) - 2183(17)} = \frac{53\,392}{157\,981}$$

$$i = 0{,}338$$

Tasa = 33,8%

Este problema corresponde a un caso real de ventas a plazos en Colombia. Invitamos al lector a meditar sobre este tipo de ve-atas y le recomendamos hacer un cuadro, con el desarrollo de la deuda.

En este mismo problema, el comerciante agrega el precio de venta a plazos, más la financiación, el 4% de impuesto de ventas.

INTERÉS COMPUESTO

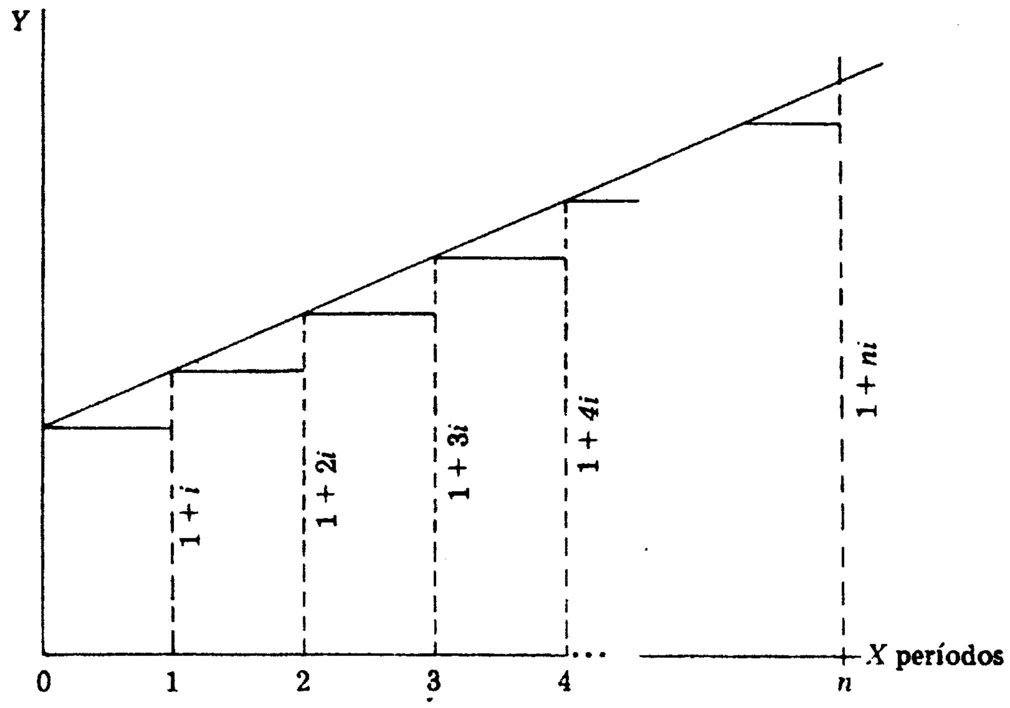
El objetivo de este capítulo es capacitar al estudiante para manejar los factores que intervienen en los cálculos del interés compuesto y enseñarle los análisis matemáticos que conducen al desarrollo de las fórmulas para el cálculo de montos, tasas y tiempos. Al terminar el capítulo el estudiante será capaz de reconocer, definir y calcular los factores que intervienen en el interés compuesto, calcular montos, tasas nominales, tasas efectivas y tasas equivalentes.

INTERÉS COMPUESTO

En los problemas de interés simple, el capital que genera los intereses permanece constante todo el tiempo de duración del préstamo. Si en cada intervalo de tiempo convenido en una obligación se agrega los intereses al capital, formando un monto sobre el cual se calcularán los intereses en el siguiente intervalo o período de tiempo y, así, sucesivamente, se dice que los intereses se capitalizan y que la operación financiera es a interés compuesto.
En una operación financiera a interés compuesto, el capital aumenta en cada final de período, por adición a los intereses vencidos a la tasa convenida.

Función del tiempo El crecimiento natural es una variación proporcional a la cantidad presente en todo instante; tal es el caso del crecimiento de los vegetales, de las colonias de bacterias, de los grupos de animales, etc. Estos crecimientos son funciones continuas del tiempo. En la capitalización a interés compuesto, también se produce el crecimiento continuo; más adelante, en el capítulo 4.9 estudiaremos el monto a interés compuesto como función continua del tiempo.
En el capítulo 1.12, incluimos la gráfica de los valores del monto a interés simple y la función $Y = 1 + Xi$ en que los valores de Y corresponden al monto de un capital de $1, como función

continua del tiempo X. Sin embargo, para las aplicaciones comerciales, el tiempo en el eje X se mide en períodos o fracciones de períodos que no son inferiores a un día; esto implica que el monto a interés simple comercial es una función discreta del tiempo. En estas condiciones, la gráfica de los valores del monto a interés simple, para un capital inicial de $1, no es la gráfica de la función continua Y = 1 + Xi que es una recta, sino que es la escalonada que se muestra en la gráfica (observe que, para fracciones de período, la tasa de interés simple es tasa proporcional ; vea el problema 1, del capítulo 1.

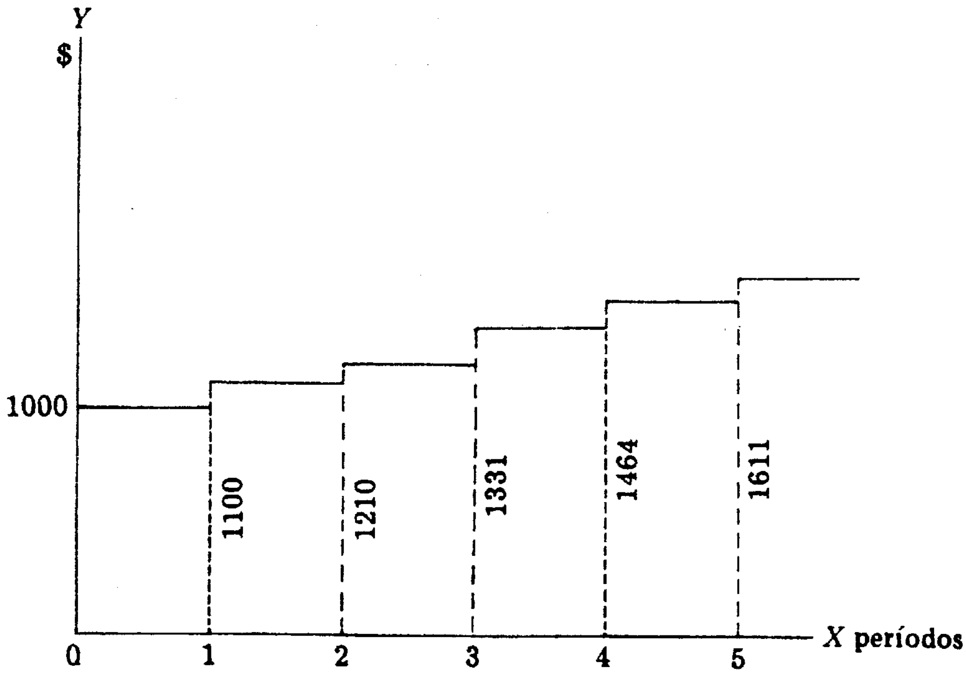


En el crecimiento de un capital a interés compuesto, los intereses ganados se agregan al capital en intervalos de tiempo que se estipulan contractualmente; bajo estas condiciones, el monto es función discreta del tiempo.

Gráfica del monto de un capital de $1000 al interés del 10% con capitalización anual. (Véase ejemplo 4.1.)

Período de capitalización Es el intervalo de tiempo convenido en la obligación, para capitalizar los intereses.

Tasa de interés compuesto Es el interés fijado por período de capitalización.



Monto de un capital a interés compuesto o monto compuesto Es el valor del capital final o, capital acumulado después de sucesivas adiciones de los intereses.

Ejemplo 4.1 Una deuda de $1000 a 5 años plazo, es convenida al interés del 10% con capitalización anual. Esto significa que al final de cada año los intereses deben capitalizarse. A continuación, se muestra en el cuadro de desarrollo de la deuda el capital acumulado al final de cada período, que en este caso es anual.

Número de períodos	Capital a principio de período	Intereses en el período	Capital más intereses a final de período
1	1000,00	100,00	1100,00
2	1100,00	110,00	1210,00
3	1210,00	121,00	1331,00
4	1331,00	133,10	1464,10
5	1464,10	146,41	1610,51

Si el préstamo fuese a interés simple, su monto al final de los 5 años sería:

$S = C(1 + ni) = 1000\,[1 + 5(0{,}10)] = 1000(1 + 0{,}50) = 1000(1{,}50)$

$S = \$\,1500$ **(monto a interés simple)**

Monto a interés compuesto $S = \$\,1610{,}51$.

4.2 MONTO A VALOR FUTURO A INTERÉS COMPUESTO

Sea el capital C puesto al interés i por período de capitalización (i es el tanto por ciento en el período).Calculemos el monto S al final de n períodos de capitalización.

Períodos	**Capital a principio de período**	**Intereses en el período**	**Capital más intereses a final de período**
1	C	Ci	$C + Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2 i = C(1+i)^3$
4	$C(1+i)^3$	$C(1+i)^3 i$	$C(1+i)^3 + C(1+i)^3 i = C(1+i)^4$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}\, i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1} i = C(1+i)^n$

o sea

$$S = C(1+i)^n \qquad (19)$$

S = monto compuesto (también es costumbre designarlo por F)
C = capital (también es costumbre designarlo por P mayúscula)
i = tanto por uno en el período
$(1 + i)^n$ = factor de acumulación, o factor de interés compuesto y corresponde al monto de 1 a interés compuesto en n períodos.

Los valores del factor de acumulación $(1 + i)^n$ pueden calcularse, utilizando calculadora, logaritmos o por desarrollo del teorema del binomio. En la práctica se utilizan tablas financie-ras en las que están calculados hasta con diez decimales, los valores de $(1 + i)^n$, para las tasas más utilizadas y para valores de n desde 1 hasta 100 períodos. Al final de este libro, hemos incluido, parcialmente, las tablas financieras que estudiaremos; ellas permitirán al lector comprender y practicar su manejo.

La tabla I tiene los valores de $(1 + i)^n$ para valores de i, desde $^1/_4$ % al 8%; para valores de n desde 1 hasta 100 períodos. Aproximados hasta 8 decimales.

Ejemplo 4.2 Un banco ofrece la tasa del 10% para los depósitos en cuenta de ahorros. Calcular el monto de un depósito de $ 1000 al cabo de 10 años utilizando: (a) máquinas de calcular; (b) logaritmos; (c) tablas.
(a) Para este cálculo se empleó una calculadora de bolsillo de 8 dígitos, con punto decimal y operador de constantes. La secuencia de las operaciones fue:

$1,1(1,1) = 1,21$; $1,21(1,21) = 1,4641$; $1,4641(1,4641) = 2,1435888$

$2,1435888(1,21) = 2,5937424$; $(1 + 0,10)^{10} = 2,5937424$

$S = C(1 + i)^n$

$C = 1000$; $i = 0,10$; $n = 10$

$S = 1000(1 + 0,10)^{10} = 1000(1,1)^{10} = 1000(2,5937424)$

$S = \$2593,74$

(*b*) Utilizando logaritmos

$S = 1000(1 + 0,10)^{10} = 1000(1,1)^{10}$

$\log S = \log 1000 + 10 \log 1,1$

$$\begin{array}{llr} \log 1000 = & & = 3,000000 \\ 10 \log 1,1 & = 0,041393(10) = & \underline{0,041393} \\ & \log S = & 3,413930 \end{array}$$

$S = \$2593,71$

(*c*) Utilizando tablas:

Se busca en la tabla I la intersección de la columna del 10% con la fila $n = 10$ y encontramos el valor 2,59374246

$S = 1000(1 + 0,10)^{10} = 1000(2,59374246)$

$S = \$2593,74$

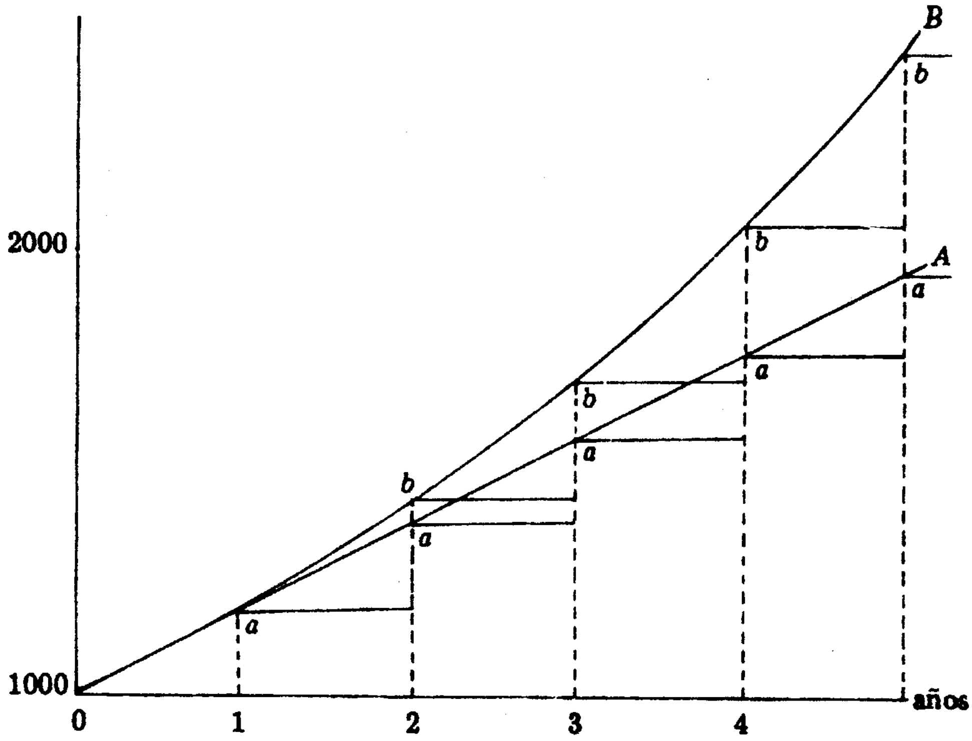
4.3 COMPARACIÓN ENTRE SIMPLE E INTERES COMPUESTO

Por ser objetiva, la mejor forma de comparar los montos es dibujando las gráficas correspondientes a una misma tasa, para el interés simple y el compuesto. Sea por ejemplo la tasa del 20% y un capital de \$1000. Los montos son S = 1000 [1 + n(0,20)] para el interés simple y $S = (1 + 0,20)^n$ para el interés compuesto.

Función discreta
a = monto de \$1000 al interés simple del 20%
b = monto de \$1000 al interés compuesto del 20%

Función continúa
A línea recta S =1000 + n (1,20)
B función exponencial $S = 1000(1,2)^n$

El monto a interés compuesto crece en razón geométrica y su gráfica corresponde a la de una función exponencial. Por su parte, el monto a interés simple crece en progresión aritmética y su gráfica es una línea recta.



4.4 TASA NOMINAL, TASA EFECTIVA Y TASAS EQUIVALENTES

La tasa convenida para una operación financiera es su tasa nominal. Tasa efectiva de interés es la que realmente actúa sobre el capital de la operación financiera. La tasa nominal puede ser igual o distinta de la tasa efectiva y esto sólo depende de las condiciones convenidas para la operación. Por ejemplo, si se presta un capital del 8% con capitalización trimestral, el 8% es la tasa nominal anual, la tasa efectiva queda expresada por los intereses que corresponden a $100 en un año, en las condiciones del préstamo. Para el monto, tenemos:

$$S = C\,(1+ i\,)^n$$

$n = 4$; $C = 100$; $\frac{8\,\%}{4}$ = **2% de tasa efectiva en el período;** $i = 0{,}02$

$$S = 100(1 + 0{,}02)^4 = 100(1{,}02)^4 = 100(1{,}0824321)$$

$$S = \$\,108{,}24321$$

$ 100 ganan $ 8,24321 en un año o sea tasa efectiva = 8,24321.

Tasas equivalentes Son aquellas que, en condiciones diferentes, producen la misma tasa efectiva anual.

En el texto utilizaremos los siguientes símbolos para las diferentes tasas, expresadas en tanto por ciento.

i = efectiva anual
j = nominal anual
m = número de capitalizaciones en el año

En la tabla 1, las columnas se refieren a las tasas en el período de capitalización. Así, para 12% con capitalización trimestral se tiene m = 4; j = 12; $^{j}/_{m}$ = $^{12}/_{4}$= 3%. El símbolo i en las tablas se refiere al tanto por uno, en el período.

Relación entre la tasa nominal y efectiva El monto de 1 al i efectivo anual es 1 + i . El monto de 1 ala tasa j por uno con m capitalizaciones en el año es $(1 + {}^{j}/_{m})^{m}$; la ecuación de equivalencia entre estos dos montos es:

$$1 + i = (1 + \frac{j}{m})^{m}$$

$$i = (1 + \frac{j}{m})^{m} - 1 \qquad (20)$$

La fórmula (20) permite calcular la tasa efectiva equivalente a una tasa nominal j capitalizable m veces en el año. Despejando j en (20) se tiene

$$(i + 1) = (1 + \frac{j}{m})^{m}$$

$$(1 + i)^{\frac{1}{m}} = (1 + \frac{j}{m})$$

$$\frac{j}{m} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$j = m[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1] \qquad (21)$$

Introduciendo los nuevos símbolos, la fórmula del monto compuesto en n años para la tasa j capitalizable m veces en el año, queda:
número de períodos de capitalización en el año = m; número de años = n; número total de períodos = nin; tasa en el período = i = $^{j}/_{m}$

$$S = C(1 + \frac{j}{m})^{mn}$$

Para expresar la tasa nominal y el número de períodos de capitalización, se utiliza el símbolo $j_{(m)}$ que indica la tasa nominal j con m capitalizaciones en el año.

Ejemplo 4.3 Calcular el monto a interés compuesto en 8 años de un capital de \$6000 a la tasa del 10% capitalizable semestralmente.

$$C = \$6000; \quad j = 0{,}10; \quad m = 2; \quad n = 8$$

$$S = 6000 \left(1 + \frac{0{,}10}{2}\right)^{2(8)} = 6000(1 + 0{,}05)^{16}$$

En la tabla I se encuentra para el 5% en 16 períodos el valor 2,18287459

$$S = 6000(2{,}18287459)$$

$$S = \$13\,097{,}25$$

Solución con calculadora con función x^y

$$\begin{aligned} S &= 6000(1{,}05)^{16} \\ (7{,}02)^{16} &= 2{,}1838746 \\ S &= 6000(2{,}1828746) \\ S &= \$13\,097{,}25 \end{aligned}$$

4.5 CALCULO DEL ONTO PARA n MAYOR QUE 100

En los problemas, suele ocurrir que el número de períodos resulte mayor que 100, que es el máximo de la tabla. Aprovechando en estos casos las propiedades de los productos de potencias, el exponente del factor de acumulación se descompone en sumandos, utilizando tantos de valor 100 como sea necesario y, así, se calcula el factor de acumulación por producto de factores cuyos valores figuran en la tabla

$$(1 + i)^{x+y} = (1+i)^x (1+i)^y$$

Ejemplo 4.4 Calcular el monto al cabo de 40 años de una deuda de \$ 4000, al 9% de interés, con capitalización bimensual.

$$C = 4000; \quad j = 0{,}09; \quad m = 6; \quad n = 40$$

$$C = 4000; \quad j = 0{,}09; \quad m = 6; \quad n = 40$$

$$S = 4000 \left(1 = \frac{0{,}09}{6}\right)^{6(40)} = 4000(1 + 0{,}015)^{240}$$

$$240 = 100 + 100 + 40$$

$$S = 4000(1 + 0{,}015)^{100+100+40}$$

$$S = 4000(1 + 0{,}015)^{100}(1 + 0{,}015)^{100}(1 + 0{,}015)^{40}$$

En la tabla I se encuentran los valores de la columna de 1 ½% para:

$$(1 + i)^{100} = 4{,}43204565; \quad (1 + i)^{40} = 1{,}81401841$$

$$S = 4000(4{,}43204565)(4{,}43204565)(1{,}81401841)$$

$$S = \$142\,531{,}26$$

Con una calculadora con función x^y , se encuentra

$$(y^1) = 35,632815$$

$$7000(35,632815) = 142\ 531,26$$

4.6 MONTO COMPUESTO CON PERIODOS DE CAPITALIZACION FRACCIONARIOS

Las condiciones convenidas, en una operación financiera a interés compuesto, fijan el período de capitalización suponiendo que serán períodos enteros. Cuando se presentan fracciones de períodos, la costumbre comercial es calcular el monto compuesto para los períodos enteros de capitalización y utilizar el interés simple, para las fracciones de períodos.
Teóricamente, el interés simple en las fracciones de período es mayor que el compuesto a la misma tasa, ya que significa capitalizar los intereses en un período menor que el convenido y, como consecuencia, la tasa efectiva resulta mayor.
La tabla III contiene los valores de $(1 + i)^{1/p}$, que es el monto de 1 a interés compuesto para fracciones de período.

Ejemplo 4.5 Una deuda de $100 000 convenida al 6% con capitalización anual es pagada a los 2 años 4 meses.
La costumbre o regla comercial indica cobrar los intereses compuestos para los 2 períodos completos y simples, para los 4 meses.

C = 100 000; i = 0,06; períodos completos = 2; fracción de período = 4/12 0= 1/3

monto compuesto = $S_1 = 100\ 000(1 + 0,06)^2 = 100\ 000\ (1,1236)$

$$S_1 = \$112\ 360$$

El monto S_1 gana intereses simples en los 4 meses y su monto final S será:

$$S = 112\ 360\ [1 + \frac{1}{3}(0,06)] = 112\ 360(1,02)$$

$$S = \$\ 114\ 607,20$$

Desde el punto de vista teórico, el monto debe calcularse a interés compuesto para el total de períodos, incluida la fracción.

$$C = 100\ 000; \quad i = 0,06; \quad n = 2^1/_3$$

$$S = 100\ 000(1 + 0,06)^{2^{1/3}} = 100\ 000(1 + 0,06)^2(1 + 0,06)^{1/3}$$

Tablas I y III $(1 + 0,06)^2 = 1,1236; \quad (1 + 0,06)^{1/3} = 1,019612282$

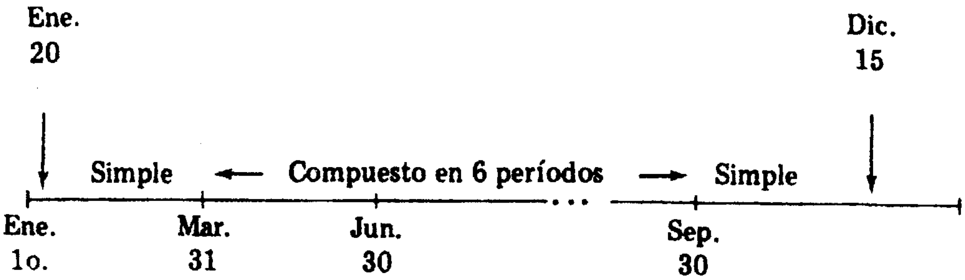
S = 100 000(1,1236)(1,01961282)
S = $114 563.69

Solución con calculadora con tecla de fracciones y función x^y
(1 + 0,06)2 1/3 = $(1,06)^{25159}$ = 1,145637

si sólo tiene función x^y entonces calculará
$(1 + 0,06)^{2.333333} = 4,145637$

En el monto calculado para la fracción de período, los intereses simples son siempre mayores que el monto a interés compuesto; en el ejemplo anterior, la diferencia es de $ 43,51.
Para el cálculo del interés compuesto, hay diferentes costumbres comerciales para el tratamiento de los intereses, en las fracciones de período. En algunas operaciones financieras, se señalan expresamente las fechas de capitalización en el año y todo dinero colocado entre fechas, gana interés simple, hasta la fecha inicial del período siguiente; todo dinero retirado entre fechas gana interés simple, desde la fecha terminal del período anterior. Así:

Ejemplo 4.6 Alguien deposita $1000 el 20 de enero en una cuenta de ahorros que ofrece el 6% de interés capitalizable trimestralmente los: 31 de marzo, 30 de junio, 30 de septiembre y 31 de diciembre. Calcular el monto que podrá retirar el 15 de diciembre del año siguiente.



El capital gana intereses simples, durante los 70 días que trascurren desde el 20 de enero al 31 de marzo, convirtiéndose en un monto S_1 que gana intereses compuestos, durante los 6 períodos completos que trascurren entre el lo. de abril y el 30 de septiembre del año siguiente, convirtiéndose en un monto S_2, que gana intereses simples hasta el 15 de diciembre.

$$\text{monto } S_1 + 1000\left[1 + \frac{70}{360}(0{,}06)\right] = 1000(1{,}01166667)$$

$$\text{monto } S_2 = S_1\left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^6 = S_1(1{,}09344326) =$$
$$1000(1{,}01166667)(1{,}09344326)$$

$$\text{monto final } S = S_2\left[1 + \frac{75}{360}(0{,}06)\right] = S_2(1{,}0125)$$

$$\text{monto final } S = 1000(1{,}01166667)(1{,}09344326)(1{,}0125)$$

$$S = \$1120{,}03$$

El lector deberá investigar las costumbres locales para estos casos.

4.7 CALCULO DE LA TASA DE INTERES COMPUESTO

En la fórmula del monto a interés compuesto, si se conoce el monto S, el capital C y el tiempo n, queda determinado el valor de i.

En la práctica, el cálculo aproximado de i se hace utilizando la tabla I. El cálculo matemático se efectúa utilizando logaritmos. En el ejemplo que sigue, ilustramos ambos procedimientos.

Ejemplo 4.7 Al morir, alguien deja un legado de \$100 000 para que con sus intereses compuestos sean entregados, al cumplir 18 años, a su hija que en esos momentos tiene 7 años de edad. Si la hija al cumplir la edad fijada, recibe \$190 071,20, ¿qué interés con capitalización anual ganó la herencia?

A Cálculo utilizando la tabla I. Se busca en la tabla I, en la fila que corresponde a n = 11, los valores, por exceso y por defecto, más próximos al que resulte de despejar n en la fórmula del monto.

$$S = C(1 + i)^n$$

$$S = 190\,071{,}20; \quad C = 100\,000; \quad n = 11$$

$$190\,071{,}20 = 100\,000(1 + i)^{11}$$

$$(1 + i)^{11} = \frac{190\,071{,}20}{100\,000} = 1{,}900712$$

Este valor se encuentra entre 1,89829856 que corresponde al 6% y 1,99915140 que corresponde al 6 $^1/_2$%. El interés buscado es mayor que el 6% y menor que el $6^1/_2$%. Su valor aproximado se encuentra por interpolación lineal.

a 0,065	corresponde 1,99915140	a 0,06 + x	corresponde 1,90071200
a 0,06	corresponde 1,89829856	a 0,06	corresponde 1,89829856
0,005 es a	0,10085284 como	x es a	0,00241344

$$\frac{0{,}005}{0{,}10085284} = \frac{x}{0{,}00241344}$$

$$x = \frac{0{,}005(0{,}00241344)}{0{,}10085284}$$

$$x = 0{,}00012$$

$$i = 0{,}06 + 0{,}00012 = 0{,}06012$$

$$\textbf{tasa de interés} = 6{,}012\%$$

B **Cálculo utilizando logaritmos**

$$190\ 071{,}20 = 100\ 000(1+i)^{11}$$

$$\log 190\ 071{,}20 = \log 100\ 000 + 11 \log (1+i)$$

$$\log (1+i) = \frac{\log 190\ 071{,}20 - \log 100\ 000}{11}$$

$$\log 190\ 071{,}20 = 5{,}278916$$

$$\log 100\ 000 = \underline{5{,}000000}$$

$$\log (1+i) = 0{,}278916:11 = 0{,}025356$$

$$1+i = 1{,}06012$$

$$i = 0{,}06012$$

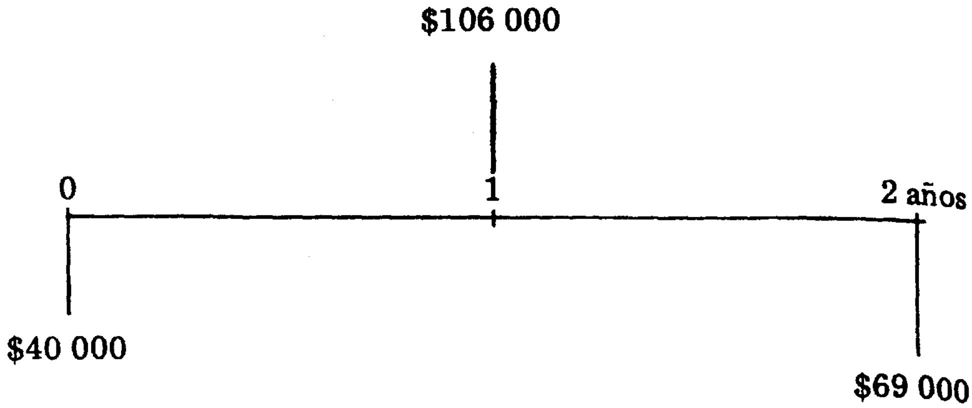
$$\textbf{tasa de interés} = 6{,}012\%$$

1.8 UN CASO PARADOJICO

En este nivel de nuestro estudio debemos preguntarnos sobre el significado que tiene la tasa de interés interno. Anteriormente explicamos que es la tasa a que permanecen invertidos los dineros en un cierto juego financiero para el cual esa tasa interna fue la alternativa escogida; el siguiente ejemplo, que conduce a una situación paradójica, nos aclara este concepto de tasa interna. Generalmente el cálculo de i conduce a las soluciones de ecuaciones de grado superior y estas ecuaciones pueden tener varias soluciones reales lo que significaría que para un mismo problema financiero tendríamos diferentes tasas internas de interés; sea por ejemplo:

Una persona compra por $109 000 una mercancía que le será entregada dentro de un año, para ello paga hoy $ 40 000 comprometiéndose a pagar el saldo, al recibir la mercancía, por medio de un pagaré a un año de plazo. Ocurre que en el instante de recibir la mercancía la vende de inmediato en $ 106 000.
¿Qué porciento de utilidad obtuvo en este negocio?

Ordenemos las cantidades en un diagrama de flujo de caja y establezcamos una ecuación de equivalencia llevando todos los valores al tiempo 0



$$40\,000 + 69\,000(1+i)^{-2} = 106\,000(1+i)^{-1}$$

o sea

$$40(1+i)^2 - 106(1+i) + 69 = 0$$ resolviendo esta ecuación de segundo grado se tiene

$$(1+i) = \frac{106 \pm \sqrt{106^2 - 4(40)(69)}}{2(40)}$$

$$(1+i) = \frac{106 \pm 14}{80}$$

$$1 + i_1 = 1{,}5$$

$$i_1 = 0{,}5; \quad \text{tasa interna} = 50\%$$

$$1 + i_2 = 1{,}15; \quad \text{tasa interna} = 15\%$$

Paradójicamente tenemos para el mismo negocio dos tasas internas tan diferentes como el 15% y el 50%.

En este problema la tasa interna carece de sentido y es una solución matemática ajena a los principios financieros. La interpretación de este problema paradójico se encuentra en el área de la evaluación económica de proyectos financieros; sin la pretensión de incursionar en el área propia de la evaluación de proyectos financieros indicamos el tratamiento de nuestro problema.

Si los $ 106 000 obtenidos al final del primer año pueden ser invertidos al 10% (tasa de oportunidad), en estas condiciones al final del segundo año se tendrá:

$$(109\,000)(1{,}1) - 69\,000 = \$\,50\,900$$

formando la ecuación de equivalencia

$$40\,000(1+i)^2 = 50\,900$$

$$(1+i)^2 = 1{,}2725$$

$$1 + i = 1{,}1281$$

$$i = 12{,}81\%$$

Tenemos en estas condiciones que el negocio tiene una rentabilidad del 12.81%.

Nuestro objetivo es enseñar el manejo de capitales en el tiempo utilizando tasas internas. Las técnicas para la evaluación económica de proyectos financieros corresponde a otro nivel de estudio que exige el conocimiento previo de las matemáticas financieras. Erróneo resultaría a su vez enseñar las técnicas para la evaluación de proyectos a alumnos con conocimientos superficiales de matemáticas financieras.

4.9 CALCULO DEL TIEMPO

En forma análoga el cálculo de i, el tiempo o sea el valor de n puede calcularse utilizando la tabla I o por aplicación de logaritmos.

Ejemplo 4.8 ¿En qué tiempo un depósito de $1000 se convertirá en $1500 al 6% con capitalización semestral?

$$S = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$$

$$S = 1500; \quad C = 1000; \quad j = 0{,}06; \quad m = 2$$

$$1500 = 1000(1 + 0{,}03)^{2n}$$

$$(1 + 0{,}03)^{2n} = \frac{1500}{1000} = 1{,}5$$

Se busca en la tabla I, en la columna del 3%, los valores, por exceso y por defecto, más próximos a 1,5. Este valor se encuentra entre 1,46853371 que corresponde a 13 períodos y 1,51258972 que corresponde a 14 períodos. Interpolando como en el caso anterior, se tiene:

a 14 corresponden 1,51258972	a 13 + x corresponde 1,50000000
a 13 corresponden 1,46853371	a 13 corresponde 1,46853371
1 es a 0,04405601 como	x es a 0,03146629

$$\frac{1}{4405601} = \frac{x}{3146629}$$

$$x = \frac{3146629}{4405601}$$

$$x = 0{,}7142337$$

$$2n = 13 + 0{,}7142337 = 13{,}7142337$$

$$n = 6{,}8571 \text{ años}$$

utilizando una calculadora con función logaritmo

$$(1{,}0{,}03)^{2N} = 1{,}5$$

$$2\ n \log(1{,}03) = \log(1{,}5)$$

$$2n = \frac{\log(1{,}5) = 0{,}176091}{\log(1{,}03) = 0{,}012837}$$

$2n = 13{,}7172$

$n = 6{,}8586$ años

En estos problemas la respuesta se da aproximada y es correcto decir que el tiempo aproximado es de 7 años y que el monto será ligeramente superior al deseado. Si la capitalización es por períodos completos y la fracción se calcula a interés simple, el procedimiento es calcular el monto en el número de períodos inmediatamente inferior y, para la diferencia, se calcula el tiempo a interés simple. En nuestro ejemplo se calcula así:

monto en 13 períodos = $1000(1 + 0{,}03)^{13} = 1000(1{,}46853371)$
monto en 13 períodos = 1468,53
diferencia con el monto propuesto = 1500 — 1468,53 = 31,47
Para $ 31,47 se calcula el tiempo a interés simple sobre $ 1468,53

$I=Cni$
$I=31{,}47;\ C=1468{,}53;\ i= 0{,}06$
$31{,}47 = 1468{,}53(n)(0{,}06) = 88{,}1118(n)$

$$n = \frac{31.47}{88{,}112} = 0{,}35716 \text{ años} = 4 \text{ meses } 9 \text{ días}$$

En este caso, la respuesta sería 6 años 10 meses 9 días.

4.10 CRECIMIENTO NATURAL E INTERES COMPUESTO

Hemos creído conveniente incluir en este capítulo algunas palabras sobre el crecimiento natural o exponencial y la deducción de la fórmula del monto a interés compuesto a partir de las leyes del crecimiento natural o exponencial.
Esto será de importancia para comprender muchos aspectos teóricos de interés compuesto; en particular, será de utilidad para los que deseen profundizar sus estudios en esta área.
Si la razón de cambio de una cantidad con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t, se dice que el crecimiento es natural. Esto es, si Y es la cantidad presente en el tiempo t, entonces

$$\frac{dY}{dt} = kY; \ (Y = F(t); \text{ función de } t)$$

${}^{dY}/_{dt}$ es la razón de variación instantánea de Y con respecto a t k es un número constante que depende de las condiciones de cada problema. Su valor se determina bajo condiciones experimentales o simplemente impuestas, como en el crecimiento del dinero o los planes de desarrollo industrial.

$$\frac{dY}{Y} = kdt$$

Integrando se tiene inY = kt + a (a = constante de integración)

$$Y = e^{kt+a} = e^{kt}e^{a}$$

remplazando $e^{a} = A$

$$Y = Ae^{kt}$$

Ejemplo 4.9 En un cultivo, el número de bacterias crece proporcionalmente al número presente de ellas. Si en un instante dado hay 1000 bacterias y una hora después 2000, calcular el número de bacterias. 3 horas después.

$$Y = Ae^{kt}$$

Para $t = 0$; $Y = 1000$

$$1000 = Ae^{0k} = Ae^{0} = A$$

$$A = 1000$$

Para $t = 1$; $Y = 2000$

$$2000 = 1000e^{k}$$

$$e^{k} = 2$$

$$k = \ln 2$$

Es decir que el número presente de bacterias en un tiempo t **es**

$$Y = 1000e^{t\ln 2} = 1000e^{\ln 2^{t}}$$

sea $\ln 2^{t} = b$ **entonces por definición** $e^{b} = 2^{t}$; **remplazando** b **se tiene** $e^{\ln 2^{t}} = 2^{t}$ **de donde**

$$Y = 1000(2^{t})$$

para $t = 3$ **horas, la cantidad presente de bacterias será**

$Y = 1000(2^{3})$

$Y = 8000$ **bacterias al cabo de 3 horas**

Deducción de la fórmula del monto a interés compuesto Si la cantidad presente es dinero, podemos imponer la condición que en un período de tiempo t crezca con crecimiento natural, por adición de sus intereses i en cada período.

En el instante t = 0; Y = C (capital inicial), sustituyendo en

$$Y = Ae^{kt}$$

Se tiene (1) $C = Ae^{k0} = A$

o sea (2) $Y = Ce^{kt}$

Al final del primer intervalo $t = 1$; $Y = C(1 + i)$; i = tanto por uno en el período t

o sea
$$C(1 + i) = Ce^{k}$$
$$e^{k} = (1 + i)$$
$$k = ln(1 + i)$$

Sustituyendo en (2) $Y = Ce^{t\,ln(1+i)} = Ce^{ln(1+i)^{t}}$

Como $e^{ln(1+i)^{t}} = (1 + i)^{t}$ entonces $Y = C(1 + i)^{t}$

Sustituyendo la cantidad presente Y por el monto S; el valor de t corresponde al número de períodos, o sea, es igual a n,

Se tiene $S = C(1 + i)^{n}$

Tasa instantánea Si en $j_{(m)}$ suponemos que m crece sin límite ($m \to \infty$) entonces, el período de capitalización es un intervalo de tiempo más pequeño que cualquier cantidad arbitrariamente escogida. En este caso, se dice que la capitalización es continua y que la tasa es una tasa instantánea.

La tasa instantánea acostumbra a designarse con la letra griega delta (δ). Por definición

$$\underset{m \to \infty}{\delta} = j_{(m)}, \text{ o simplemente } \delta = j_{(\infty)}$$

De acuerdo con lo estudiado en tasas equivalentes:

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{j}}\right)^{\frac{m}{j}j}$$

como $\lim\limits_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{j}}\right)^{\frac{m}{j}}\right] = e$ (véanse págs. 75 y 78 del cálculo Sherman K. Stein, edición McGraw-Hill 1974)

se tiene $1 + i = \lim\limits_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{j}}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^{j}$

$$1 + i = e^j \text{ en que } j = j_{(\infty)} = \delta$$
$$1 + i = e^{\delta}$$

de dorde $\delta = \ln(1 + i)$

El valor de б se conoce con el nombre de fuerza del interés, y es la tasa continua de crecimiento de una unidad de capital en una operación financiera; en tanto que la tasa efectiva es el interés por unidad de capital en un período.

Ejemplo 4.10 Hallar el valor de la fuerza de interés que corresponda al interés compuesto del 8%.

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1 + 0{,}08) = \ln 1{,}08$$
$$\delta = 0{,}07695;\ 7{,}695\%$$

Ejemplo 4.11 Hallar el monto de $ 5000 en 10 años: (a) a la tasa efectiva del 6%, (b) a la tasa del 6% con capitalización mensual, (c) a la tasa del 6% continuo.

(a) $S = 5000(1 + 0{,}06)^{10} = 5000(1{,}7908477) = \$8954{,}24$

(b) $S = 5000(1 + \frac{0{,}06}{12})^{120} = 5000(1{,}81939673) = \$9096{,}98$

(c) De: $1 + i = e^{\delta}$, $i = e^{\delta} - 1$

Sustituyendo en $S = 5000(1 + i)^n$

se tiene $S = 5000(e^{\delta})^n = 5000e^{n\delta}$

Reınplazando los valores de: n y δ se tiene

$$S = 5000e^{10(0{,}06)} = 5000e^{0{,}6}$$

Calculando $e^{0{,}6}$ por medio de logaritmos se tiene

$$S = \$9110{,}60$$

Notación estándar En este nivel recomendamos trabajar los problemas utilizando las fórmulas con el objeto de familiarizarse con ellas, recordando que son de absoluta necesidad cuando se trabaja con calculadora. Para evitar anotar las fórmulas, se ha creado una notación estándar para representar los factores; ésta tiene el siguiente modelo:

(X/Y, i% , n)

X indica el valor que se debe calcular
Y corresponde al valor conocido
I es la tasa de interés
n el número de períodos (los economistas suelen definirlo como horizonte)

Así: (F/P, i%, n) es el factor del valor futuro o monto que multiplicado por el valor actual o presente P da el monto.

(P/F, i%, n) es el factor del valor actual que multiplicado por el valor dado del monto o valor futuro F da el valor actual.

La búsqueda del monto queda expresado:

fórmula $S = C(1 + i)^n$; notación estándar P(F/P, i%, n)

P = Valor presente = Valor actual C
F = Valor futuro = monto S

Si el lector dispone de una calculadora con funciones financie-ras, deberá usar la notación estándar. Pero le hacemos notar que en el estudio de matemáticas financieras, para una comprensión clara de los factores que entran en juego en un problema, es necesario que se familiarice con las fórmulas y adquiera destreza en su manejo; esto le permitirá comprender con facilidad los temas que presentamos en los capítulos que siguen. Es indudable que en las actividades profesionales la notación estándar y una calculadora con funciones financieras serán sus mejores recursos. Por lo pronto está en la etapa de aprendizaje y para facilitarle su estudio nos hemos esmerado en análisis, desarrollos teóricos y secuencia de los temas que representamos.

4.11 PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Qué banco es preferible para depositar dineros en cuenta corriente: A, que ofrece el 7% con capitalización trimestral o B, que ofrece el 7 $^1/_4$% con capitalización semestral?

La mejor oferta es la que corresponda a la mayor tasa efectiva anual.

Banco A $i = (1 + \frac{j}{m})^m - 1$

$j = 0{,}07$; $m = 4$; $\frac{j}{4} = 0{,}0175$ **que corresponde al** $1\frac{3}{4}$ **%.**

Utilizando calculadora

$$i = (1 + 0{,}0175)^4 - 1$$

$$i = 1{,}07185903 - 1 = 0{,}07185903$$

$$\text{tasa efectiva} = 7{,}185903\%$$

Banco *B*

$j = 0{,}0725$; $m = 2$, $\dfrac{j}{m} = 0{,}03625$ **que corresponde al** $3\frac{5}{8}\%$ **valor que no figura en nuestra tabla I.**

Utilizando calculadora

$$1 + i = (1 + 0{,}03625)^2$$
$$1 + i = 1{,}073814$$
$$i = 0{,}073814$$

$$\text{tasa efectiva} = 7{,}38\,\%$$

Es mejor la oferta del banco *B*.

2. Calcular el monto de $ 6000 colocados al 9% de interés compuesto, capitalizable semestralmente durante 14 años 6 meses.

$$S = C(1 + \frac{j}{m})^{mn}$$

$C = \$6000$; $j = 0{,}09$; **períodos de capitalización** $= m = 2$; $\dfrac{j}{m} = 0{,}045$, $(4\frac{1}{2}\%)$, $n = 14\frac{1}{2}$ **años**; $mn = 29$.

$S = 6000(1 + 0{,}045)^{29}$ **utilizando tabla I o calculadora**

$S = 6000(3{,}58403649)$

$S = \$21\,504{,}22$

3. Una persona obtiene un préstamo de $ 30 000 a 5 años, con interés del 8% capitalizable semestralmente. Calcular el monto que debe pagar en la fecha de vencimiento.

$C = \$30\,000$; $j = 0{,}08$; $m = 2$; $\dfrac{j}{m} = 0{,}04$; $n = 5$

$S = 30\,000(1 + 0{,}04)^{10}$

$S = 30\,000(1{,}48024428)$

$S = \$44\,407{,}34$

4. Calcular el monto acumulado de $ 5000 al 6%, con capitalización mensual en 6 años 3 meses.

$$C = \$5000;\ j = 0{,}06;\ m = 12;\ \frac{j}{m} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005, (\frac{1}{2}\%);$$

$$n = 6\frac{3}{12} = 6\frac{1}{4}\ \text{año};\ mn = 12(6\frac{1}{4}) = 75\ \text{períodos}$$

$$S = 5000(1 + 0{,}005)^{75}$$

S = 5000(1,45363252)
S = $ 7268,16

5. Calcular el monto acumulado en el problema anterior, en 30 años. Sólo varía el número de períodos; m = 12; n = 30; mn = 360.

$$S = 5000\ (1 + 0{,}005)^{360}$$

La tabla I sólo tiene los valores hasta 100 períodos. Para el cálculo se descompone 360 = 100 + 100 + 100 + 60

$$S = 5000(1 + 0{,}005)^{100}\,(1 + 0{,}005)^{100}(1 + 0{,}005)^{100}(1 + 0{,}005)^{60}$$

$$S = 5000(1{,}64666849)(1{,}64666849)(1{,}64666849)(1{,}34885015)$$
S=$ 30 112,88

6. En un juicio civil por cobro de una deuda de $12 000, el juez falla ordenando el pago de la cantidad adeudada con acumulación anual de los intereses al 8,3% por 4 años, contados desde la fecha de su vencimiento. Calcular el monto acumulado de la deuda.

$$C = 12\ 000;\ i = 0{,}083;\ n = 4$$
$$S = 12\ 000(1 + 0{,}083)^{4}$$

La tabla I no tiene valores para el 8,3% que es una tasa no común en las operaciones comerciales. Para el cálculo, se procede por cálculo directo utilizando calculadora. Nuestro caso se presta para utilizar la calculadora.

$$S = 12\ 000(1{,}083)^{4} = 12\ 000(1{,}3756686)$$
S = $16 508,02

7. En el problema anterior, calcular el monto acumulado en 24 años.

$$S = 12\ 000(1{,}083)^{24}$$

Utilizando calculadora con función x^{Y}

$$(1{,}083)^{24} = 6{,}7777096$$
$$S = 12000(6{,}7777096)$$
S = $81.332,52

8. Calcular el monto compuesto, teórico, de $ 6000 en 4 años 8 meses al 7% con capitalización anual.

C = $6000; n = 4 8/12 = 4 2/3; í = 0,07

$$S = 6000(1 + 0{,}07)^{4\,{}^{2}/_{3}} = 6000(1 + 0{,}07)^{4}(1 + 0{,}07)^{{}^{2}/_{3}}$$

Tablas I y III $$S = 6000(1{,}31079601)(1{,}02280912)^{2}$$

$$S = \$\,8227{,}65$$

9. En el problema anterior, calcular el monto según la regla comercial.

$$S = 6000(1 + 0{,}07)^{4}\ [1 + \frac{2}{3}(0{,}07)]$$

$$S = 6000(1{,}31079601)(1{,}04666667)$$

$$S = \$\,8231{,}80$$

10. Calcular el interés simple equivalente al interés compuesto del 6% durante 12 años.

Fórmula general: Sean i_s = interés simple, i_c = interés compuesto

$$1 + ni_s = (1 + i_c)^n$$

$$ni_s = (1 + i_c)^n - 1$$

$$i_s = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n}$$

Para: $i_c = 0{,}06$; $n = 12$

$$i_s = \frac{(1 + 0{,}06)^{12} - 1}{12} = \frac{2{,}01219647 - 1}{12}$$

$$i_s = 0{,}08435$$

tasa de interés simple = 8,435

11. Un prestamista desea ganar el 8% efectivo anual sobre un préstamo, con intereses capitalizables trimestralmente. Hallar la tasa nominal que debe cobrar:

$$1 + i = (1 + \frac{j}{m})^m$$

$$i = 0{,}08;\quad m = 4$$

$$1 + 0{,}08 = (1 + \frac{j}{4})^4$$

$$(1 + 0{,}08)^{{}^{1}/_{4}} = 1 + \frac{j}{4}$$

Tabla III $$1{,}01942655 = 1 + \frac{j}{4}$$

$$\frac{j}{4} = 0{,}01942655$$

$$j = 0{,}0777062$$

tasa nominal = 7,77%

12. ¿En qué tiempo se duplica un capital colocado al 7%, con capitalización semestral?

$$S = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$$

$$S = 2C; \quad j = 0{,}07; \quad m = 2$$

$$2C = C(1 + 0{,}035)^{2n}$$

$$2 = (1 + 0{,}035)^{2n}$$

En la tabla I, columna del $3^1/_2$% encontramos que el valor 2 está comprendido entre 20 y 21 períodos. Interpolando se tiene

a 21 corresponde 2,05943147	a 20 + x corresponde 2,00000000
a 20 corresponde 1,98978886	a 20 corresponde 1,98978886
1 es a 0,06964261 como	x es a 0,01021114

$$\frac{1}{0{,}06964261} = \frac{x}{0{,}01021114}$$

$$x = \frac{0{,}01021114}{0{,}06964261} = 0{,}1466220$$

$$2n = 20 + x = 20 + 0{,}1466220 = 20{,}1466220$$

$$n = 10{,}0733110 \text{ años} = \text{aproximadamente } 10{,}073 \text{ años}$$

Nota El tiempo en años debe aproximarse hasta el tercer decimal, que puede corresponder hasta 3 días en el cálculo del tiempo.

13. En el problema anterior, proceder calculando el monto compuesto en períodos enteros y los intereses simples para la fracción de tiempo.

El valor más próximo es 1,98978886 que corresponde a 20 períodos

El valor más próximo es 1,98978886 que corresponde a 20 períodos

$$2 = 1{,}98978886\,[1 + n(0{,}07)]$$

$$1 + n(0{,}07) = \frac{2}{1{,}98978886} = 1{,}0051318$$

$$n = \frac{0{,}0051318}{0{,}07} = 0{,}0733114$$

tiempo =10,0733114 años, aproximadamente 10,073 años
= 10 años 26 días

14. Resolver el problema No. 12, utilizando una calculadora que tiene una memoria y la función 1n.

$(1 + 0{,}035)^{2n} = 2$

$1n(1{,}035) = 0{,}034401427$ entra a memoria

$1n(2) + MR = 20{,}1487915$

$n = 20{,}1487915 \div 2$

$n = 10{,}0744$ años

Se obtiene un tiempo ligeramente superior debido a que se trabajó la fracción de período a interés compuesto.

15. Una persona deposita \$ 7500 en una cuenta de ahorros que paga el 9%, con capitalización bimensual. ¿En qué tiempo tendrá un monto de \$10 500?

$$S = 10\,500; \quad C = 7500; \quad j = 0{,}09; \quad m = 6$$

$$10\,500 = 7500(1 + 0{,}015)^{6n}$$

$$(1 + 0{,}015)^{6n} = \frac{10\,500}{7500} = 1{,}4$$

23	1,40837715	22 + *x*	1,40000000
22	1,38756370	22	1,38756370

1 es a 0,02081345 como *x* es a 0,01243630

$$\frac{1}{2081345} = \frac{x}{1243630}$$

$$x = \frac{1243630}{2081345} = 0{,}5975$$

$$6n = 22{,}5975$$

$$n = 3{,}766 \text{ años} = 3 \text{ años } 9 \text{ meses } 6 \text{ días}$$

VALOR ACTUAL O PRESENTE A INTERÉS COMPUESTO

En este capítulo el estudiante aprenderá a reconocer, definir y calcular valores actuales o presentes, valores futuros o montos de sumas a interés compuesto; aprenderá a manejar ecuaciones de valores equivalentes y diagramas de flujos de caja. Al terminar el estudio del capítulo será capaz de plantear y resolver problemas financieros en los que intervienen cálculos de montos y de valores presentes o actuales de obligaciones que devengan o no intereses; será capaz de plantear ecuaciones de valores equivalentes y crear diagramas de flujos de caja.

VALOR ACTUAL O PRESENTE A INTERÉS COMPUESTO

5.1 INTRODUCCION

Una cuestión fundamental en el mundo de los negocios es la determinación del valor de aquellos bienes expresables en dinero que, por alguna condición, se recibirán en fecha futura. Así por ejemplo: ¿Qué vale hoy un legado de $1000 000 que se recibirá dentro de 10 años? ¿En cuánto puede venderse hoy un terreno que está entregado en concesión por 6 años?

Definición Valor actual o presente a interés compuesto de un dinero que se recibirá en fecha futura; es aquel capital que, a interés compuesto, tendrá en el mismo tiempo un monto equivalente a la suma de dinero que se recibirá en la fecha convenida.

5.2 CALCULO DEL VALOR ACTUAL

Utilizando la fórmula *(19)* $s = C(1 + i)^n$

obtenemos
$$C = \frac{S}{(1 + i)^n} \tag{23}$$

Notación estándar: $P = F(P/F,\ i\%,\ n)$

Para su aplicación, esta fórmula se modifica así:

$$C = S\,\frac{1}{(1 + i)^n} \tag{23a}$$

$$C = S(1 + i)^{-n} \tag{23b}$$

El factor $(1 + i)^{-n}$ es el valor actual de un monto de una unidad por recibir dentro de n periodos de capitalización, a la tasa efectiva i por periodo. Se acostumbra a expresarlo por el símbolo v^n, obteniéndose la formula equivalente a las anteriores.

$$C = Sv^n \tag{23c}$$

La tabla II contiene los valores de $(1 + i)^{-n}$ para diferentes tasas y periodos. Tal como se indico en el capitulo para el uso de la tabla I, i es la tasa efectiva expresada en tanto por uno, en el periodo de capitalización. Para valores que no figuran en las tablas, deben utilizarse calculadoras.
La formula para el valor actual a la tasa j capitalizable m veces en el año se obtiene asi:

$i = \frac{j}{m}$, m = número de períodos de capitalización en el año,

n = número de años

$$C = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn} \tag{24}$$

Ejemplo 5.1 **Hallar el valor actual de \$5000 pagaderos en 5 años, a la tasa efectiva anual del 6%.**

$$S = 5000;\quad i = 0{,}06;\quad n = 5$$

$$C = 5000\,(1 + 0{,}06)^{-5}$$

En tabla II $(1 + 0{,}06)^{-5} = 0{,}74725817$

$$C = 5000\,(0{,}74725817)$$

$$C = \$\,3736{,}29$$

En notación estándar
P = 5.000(P/F, 0,06 , 5)

que se interpreta: Dado el valor futuro F, o monto, se pide el valor P presente, o actual, al 6% efectivo en 5 períodos; por pedirse el valor actual, se utiliza el factor de valor actual v^n cuyo valor se busca en la tabla II o se calcula.
El lector debe comprender, con claridad, que la notación estándar es estrictamente necesaria, cuando se dispone de calculadoras programadas para cálculos financieros o computadores programables, al introducir P/F, el computador interpreta cálculo del valor presente dado el valor futuro o monto, calcula el factor v^n y continúa su programa hasta entregar el resultado. Pero, si su computador es programable usted deberá crear los programas, usando los conocimientos que recibió en su curso de computadores, y aplicar correctamente los conceptos financieros manejando con seguridad las fórmulas y métodos matemáticos que correspondan al problema que está trabajando. En este texto de matemáticas financieras, nuestro objetivo es que usted aprenda a manejar los conceptos y aplicar con seguridad los métodos matemáticos para obtener el resultado correcto.

Ejemplo 5.2 Hallar el valor actual de \$ 5000 pagaderos en 5 años, a la tasa del 6% capitalizables trimestralmente.

$$C = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}$$

$$S = 5000; \quad m = 4; \quad n = 5; \quad j = 0{,}06; \quad i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015$$

$$C = 5000(1 + 0{,}015)^{-20}$$

$$C = 5000(0{,}74247042)$$

$$C = \$\,3712{,}35$$

5.3 VALOR ACTUAL PARA VALORES DE n MAYORES DE 100

Se procede como en 4.4.
Ejemplo 5.3 Hallar el valor actual de \$100 000 pagaderos dentro de 30 años, al 6% capitalizable trimestralmente.

$$S = 100\,000; \quad m = 4; \quad j = 0{,}06; \quad n = 30$$

$$C = 100\,000(1 + 0{,}015)^{-120}$$

$$C = 100\,000(1 + 0{,}015)^{-100}(1 + 0{,}015)^{-20}$$

.

5.4 VALOR ACTUAL A INTERES COMPUESTO CON PERIODOS DE CAPITALIZACION RACCIONARIOS

C = 100 000 (0,22562944)(0,74247042)

C = $16 752,32

En la sección 4.5, explicamos las dos formas de calcular el monto a interés compuesto, cuando se presentan fracciones de período. El mismo método se aplica para el cálculo del valor actual o presente en fracciones de período.

Regla comercial Se calcula a interés compuesto el valor actual, para los períodos enteros, y a interés simple, para las fracciones de período.

Calculo teórico Se calcula a interés compuesto para todo el tiempo, incluyendo la fracción de período.
El valor actual o presente resulta menor, cuando se calcula a interés simple para la fracción de período.

Ejemplo 5.4 ¿Cuál es el valor actual de un pagaré de $ 60 000 pagaderos dentro de 2 años 8 meses, si la tasa es del 8% capitalizable semestralmente?
(a) Aplicando la regla comercial, se calcula primero el valor actual para 2 años 6 meses que equivalen a 5 períodos y, luego, sobre el valor encontrado, se busca su valor actual a interés simple en 2 meses.

$$C = S(1 + \frac{j}{m})^{-mn}$$

$$S = 60\ 000; \quad m = 2; \quad j = 0{,}08; \quad i = \frac{0{,}08}{2} = 0{,}04; \quad n = 2{,}5$$

$$C = 60\ 000(1 + 0{,}04)^{-5} = 60\ 000(0{,}82192711)$$

$$C = \$\,49\ 315{,}63$$

Así, el valor actual de $ 60 000 pagaderos en 2,5 años es de $ 49 315,63 y sobre este valor debe hallarse el valor actual, a interés simple del 8%, en 2 meses.

Aplicando la fórmula *(9)* $C = \dfrac{S}{1 + ni}$

$$S = 49\ 315{,}63; \quad i = 0{,}08; \quad n = \frac{1}{6} \text{ año}$$

$$C = \frac{49\ 315{,}63}{1 + \frac{1}{6}(0{,}08)} = \$\,48\ 668{,}74$$

(*b*) **Cálculo teórico**

$$C = S(1 + \frac{j}{m})^{-mn}$$

$$S = 60\,000;\ j = 0{,}08;\ m = 2;\ n = 2\frac{8}{12} = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

$$-mn = -2(\frac{8}{3}) = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$$

$$C = 60\,000(1 + 0{,}04)^{-5^{1/3}} = 60\,000(1{,}04)^{-5}(1{,}04)^{-^{1/3}}$$

$$\text{tabla II } (1{,}04)^{-5} = 0{,}82192711;\quad \text{tabla IV } (1{,}04)^{-^{1/3}} = 0{,}98701152$$

$$C = 60\,000(0{,}82192711)(0{,}98701152) = \$\,48\,675{,}09$$

El valor actual calculado a interés compuesto, incluyendo la fracción de período, da un resultado mayor en $ 6,35, que el obtenido calculando a interés simple para la fracción de período.

(c) Efectúe el cálculo de $(1 + 0{,}04)^{-5\ 1/3}$ con una calculadora y compare con el valor obtenido en (b) aplicando tablas.

5.5 DESCUENTO A INTERES COMPUESTO

El descuento compuesto verdadero es la diferencia entre el monto a pagar y su valor actual.

Por definición $D = S - C$ (D es el descuento verdadero)

sustituyendo $C = Sv^n$ se obtiene

$D = S - Sv^n$ factorizando

$$D = S(1 - v^n) \qquad (25a)$$

El valor v^n recibe el nombre de factor de descuento a interés compuesto.

Si la tasa de interés es j capitalizable m veces por año, se obtiene:

$$D = S\left[1 - (1 + \frac{j}{m})^{-mn}\right] \qquad (25b)$$

Descuento bancario compuesto Es el que se calcula sobre el monto de la deuda, a una tasa de descuento d . Esta forma de descuento es poco frecuente y no tiene aplicaciones prácticas. Por medio de un desarrollo análogo al utilizado para deducir la fórmula 18, para el descuento bancario compuesto se obtiene la fórmula.

$$C = S\,(1 - d)^n \qquad (26)$$

C = valor efectivo o líquido del pagaré
S = valor nominal del pagaré
d = tipo o tasa de descuento, expresada en tanto por uno.

5.6 VALOR ACTUAL DE UNA DEUDA QUE DEVENGA INTERESES

Para calcular el valor actual de una deuda que devenga intereses, es necesario calcular primero su monto nominal, es decir, el valor que liquidará la deuda a su vencimiento. Una vez calculado el monto nominal, se procede a determinar su valor actual.

Ejemplo 5.5 Calcular, 3 años antes de su vencimiento, el valor actual, al 8% capitalizable semestralmente, de un pagaré de $100 000 firmado a 5 años plazo, con el 6% de interés capitalizable anualmente.
Primero, se calcula el monto nominal a los 5 años plazo.

$$S = C\,(1 + i)^n$$

$$C=100000;\ i=0{,}06;\ n=5$$

$$S = 100\,000(1 + 0{,}06)^5$$

Luego, para este monto S calculamos el valor actual

$$C = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}$$

$$S=100\,000(1+0{,}06)^5,\ j=0{,}08;\ m=2;\ n=3$$

$$C = 100\,000(1 + 0{,}06)^5\,(1 + 0{,}04)^{-6}$$

Utilizando las tablas I y II, se tiene

$$C = 100\,000(1{,}33822558)(0{,}79031453)$$

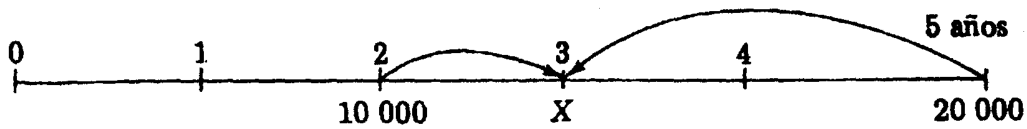
$$C = \$105\,761{,}90$$

5.7 ECUACIONES DE VALORES EQUIVALENTES

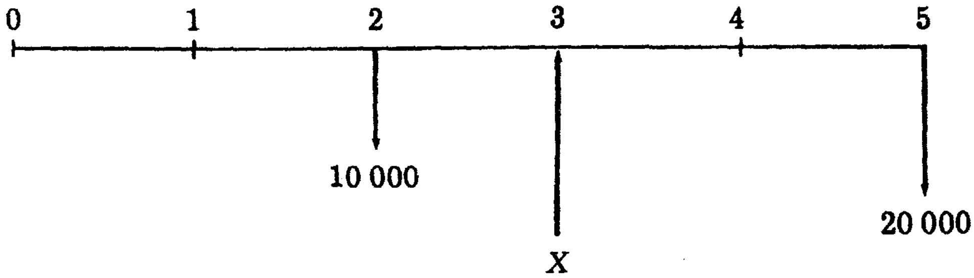
Estas ecuaciones son las que se forman igualando, en una fecha de comparación o fecha focal, las sumas de los valores en la fecha escogida de dos conjuntos diferentes de obligaciones.
Dos son los problemas básicos que deben analizarse:
1. Determinar el valor que deberá pagarse, en una fecha determinada, equivalente al valor de un conjunto de obligaciones, que vencen en diferentes fechas.
2. Determinar la fecha de vencimiento promedio en que se puede cancelar, mediante un pago único igual a la suma de los valores de un conjunto de obligaciones que tienen distintas fechas de

vencimiento. El tiempo por transcurrir hasta la fecha de vencimiento promedio se define como tiempo equivalente.

Ejemplo 5.6 Una persona debe $10 000 pagaderos dentro de 2 años y $ 20 000 a 5 años plazo. Pacta con su acreedor efectuar un pago único al final de 3 años a la tasa del 8%, capitalizable semestralmente. Calcular el valor único del pago.



En el diagrama anterior las flechas muestran el movimiento del dinero. El gráfico del flujo de caja sustituyendo los dos pagos por uno solo es : (para economizar espacio, las flechas se han colocado a un solo lado de la línea de tiempo).



$$X = 10\,000(1 + 0{,}04)^2 + 20\,000(1 + 0{,}04)^{-4}$$
$$X = 10\,000(1{,}0816) + 20\,000(0{,}85480419)$$
$$X = \$\,27\,912{,}08$$

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación de equivalencia, por el factor de conversión $(1 + 0{,}04)^n$ se obtiene la importante relación:

$$X(1 + 0{,}04)^n = 10\,000(1 + 0{,}04)^{2+n} + 20\,000(1 + 0{,}04)^{-4+n}$$

que muestra que, a interés compuesto, los valores que son equivalentes en una fecha, también lo son en cualquier otra fecha. Por ejemplo: para n = 4, la ecuación queda establecida para la fecha de vencimiento más lejana.

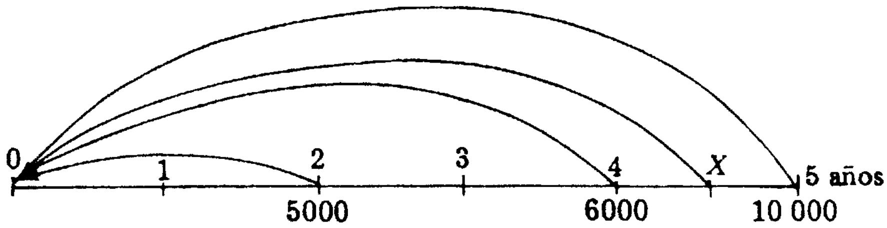
$$X(1 + 0{,}04)^4 = 10\,000\,(1 + 0{,}04)^6 + 20\,000$$

Para n = 2, la ecuación queda establecida para la fecha más temprana

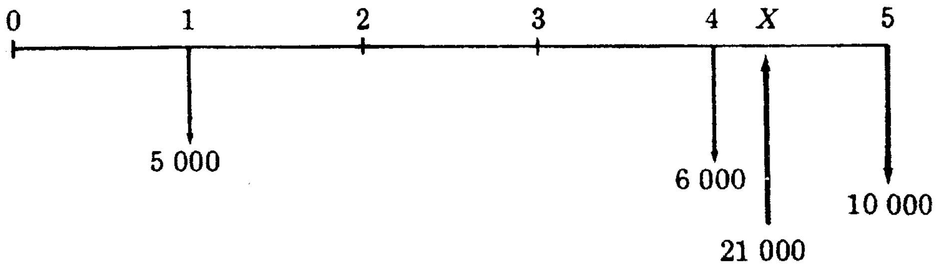
X(1 + 0,04)`2 = 10 000 + 20 000(1 + 0,04)-6

Como se desea calcular X, o sea, el valor del pago único, entonces se prefiere la ecuación de equivalencia más simple que fue la primera con X = $ 27 912,08; teniendo en cuenta que para cualquier n a partir de la fecha focal establecida, el valor del pago único se obtiene multiplicando a X por el factor de conversión, esto se puede utilizar cuando deudor y acreedor cambian la fecha y se quiere aprovechar el valor de X conocido.

Ejemplo 5.7 Calcular la fecha de vencimiento promedio del siguiente conjunto de obligaciones: $ 5000 a 2 años plazo, $ 6000 a 4 años plazo y $10 000 a 5 años plazo, al tipo del 6% con capitalización anual.



En el diagrama anterior las flechas muestran el movimiento del dinero. El gráfico del flujo de caja, sustituyendo los dos pagos por uno solo en una fecha que se debe calcular es:



Designando por X el tiempo equivalente expresado en años contados des-de el día de hoy, hasta el vencimiento del pago único igual a la suma de los valores de las diferentes obligaciones, se tiene:

$$(5000 + 6000 + 10\,000)(1 + 0{,}06)^{-x} = 5000(1 + 0{,}06)^{-2} + 6000(1 + 0{,}06)^{-4} + 10\,000(1 + 0{,}06)^{-5}$$

$$21\,000(1 + 0{,}06)^{-x} = 5000(0{,}88999644) + 6000(0{,}79209366) + 10\,000(0{,}74725817)$$

$$(1 + 0{,}06)^{-x} = \frac{4449{,}98 + 4752{,}56 + 7472{,}58}{21\,000}$$

$$(1 + 0{,}06)^{-x} = 0{,}79405343$$

Interpolando en la tabla II, se tiene

a 4 corresponde 0,79209366	a x corresponde 0,79405343
a 3 corresponde 0,83961928	a 3 corresponde 0,83961928
1 es a −0,04752562	como $x - 3$ es a −0,04556585

$$\frac{1}{-0{,}04752562} = \frac{x-3}{-0{,}04556585}$$

$$x - 3 = \frac{0{,}04556585}{0{,}04752562} = 0{,}95876393$$

$$x = 3{,}9588 \text{ años}$$

$$x = 3 \text{ años } 11 \text{ meses } 15 \text{ días}$$

Conocido el tiempo equivalente y la fecha de hoy, se procede a determinar la fecha promedio de vencimiento.

5.8 PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuánto debe invertirse hoy al 9% con capitalización semestral, para obtener $ 60 000 dentro de 10 años?

$S = 60\ 000;$ $j= 0{,}09;$ $m = 2;$ $n = 10$

$C = 60\ 000(1 + 0{,}045)^{-20} = 60\ 000\ (0{,}41464286)$
$C = \$\ 24\ 878{,}57$

2. ¿A qué valor de contado equivale la oferta de $120 000 pagaderos dentro de 2 años por un bien raíz, si las inversiones locales producen el 10% capitalizable trimestralmente?

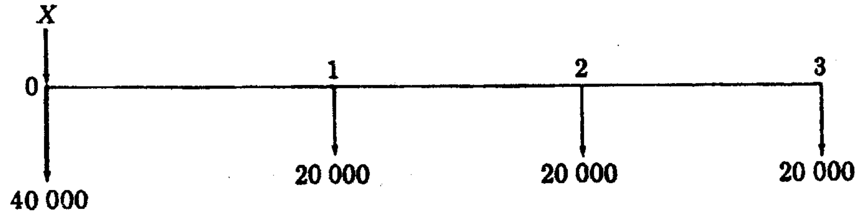
$S=120000;$ $j=0{,}10;$ $m=4;$ $n=2$

$C = 120\ 000(1 + 0{,}025)^{-8} = 120\ 000\ (0{,}82074657)$
$C =198\ 489{,}60$

3. ¿Qué oferta es más conveniente para la venta de una propiedad?

(a) $ 90 000 de contado
(b) $ 40 000 de contado y el saldo en tres pagarés iguales de $ 20 000 cada uno a: 1 año, 2 años y 3 años plazo, si el rendimiento del dinero es del 8%, capitalizable semestralmente.

Las dos ofertas se expresan en diagramas de flujos de caja a ambos lados de una misma línea de tiempo.



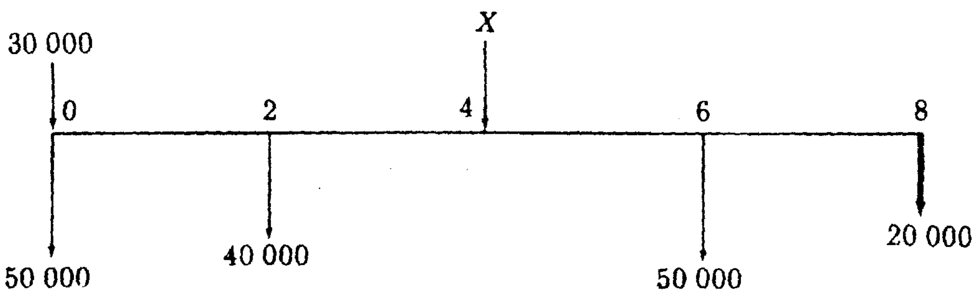
$X = 40\ 000 + 20\ 000(1 + 0{,}04)^{-2} + 20\ 000(1 + 0{,}04)^{-4} + 20\ 000(1 + 0{,}04)^{-6}$

$X = 40\ 000 + 20\ 000\ (0{,}92455621 + 0{,}85480419 + 0{,}79031453)$
$X = 20\ 000(2{,}56967493) + 40\ 000$
$X = \$\ 91\ 393{,}50$

La oferta b es superior en $ 1393,50.

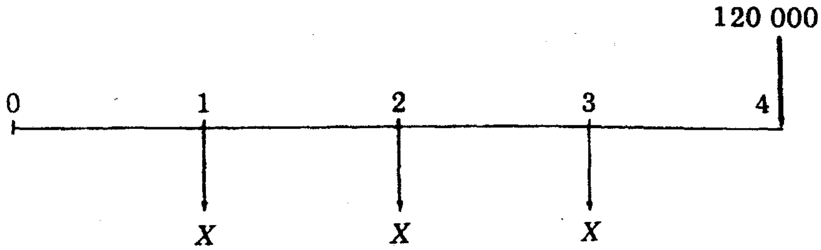
4. Un deudor tiene a su cargo los siguientes pagarés: $ 20 000 a 4 años plazo, $ 50 000 a 3 años plazo, $ 40 000 a 1 año plazo y $ 50 000 exigibles de inmediato y ofrece cancelar de contado $ 30 000 y el saldo a 2 años plazo. Hallar este valor, si el tipo de interés es 7 % capitalizable semestralmente.

Los diagramas de los dos flujos de caja equivalentes se presentan a ambos lados de una misma línea de tiempo



$$
\begin{aligned}
30\ 000 + X(1+0{,}035)^{-4} &= 50\ 000 + 40\ 000(1+0{,}035)^{-2} \\
&\quad + 50\ 000(1+0{,}035)^{-6} + 20{,}000(1+0{,}035)^{-8} \\
X(1+0{,}035)^{-4} &= 50\ 000 - 30\ 000 + 40\ 000(1+0{,}035)^{-2} \\
&\quad + 50\ 000(1+0{,}035)^{-6} + 20\ 000(1+0{,}035)^{-8} \\
X &= 20\ 000(1+0{,}035)^{4} + 40\ 000(1{,}035)^{2} + \\
&\quad 50\ 000(1+0{,}035)^{-2} + 20{,}000(1+0{,}035)^{-4} \\
X &= 20\ 000(1{,}47523) + 40{,}000(1{,}071225) + \\
&\quad 50\ 000(0{,}93351070) + 20\ 000(6{,}87144223) \\
X &= 29\ 504{,}60 + 42\ 849 + 46\ 675{,}54 + 17\ 428{,}85 \\
X &= \$129{,}903.83
\end{aligned}
$$

5. ¿Con qué pagos iguales a 1 año plazo, 2 años plazo y 3 años plazo puede remplazarse una obligación de $120 000 que vence dentro de 4 años, si la tasa de interés es del 8%, con capitalización anual?



usando la última fecha como fecha focal, se tiene:

$$X(1+0{,}08)^3 + X(1+0{,}08)^2 + X(1+0{,}08) = 120\,000$$

$$X(1{,}259712 + 1{,}166400 + 1{,}080000) = 120\,000$$

$$X = \frac{120\,000}{3{,}506112} = \$\,34\,225{,}96$$

6. Para una apreciación aproximada del tiempo equivalente, se acostumbra aplicar una regla práctica que se enuncia así: súmense los productos obtenidos al multiplicar el valor de las obligaciones por sus respectivos plazos y divídase, por la suma de los valores de las obligaciones.

Sean $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ los valores y $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ los plazos e i la tasa de capitalización por período, capitalizando m veces en el año.

$$(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)(1+i)^{-mn} = S_1(1+i)^{-mn_1} + S_2(1+i)^{-mn_2} + \ldots + S_k(1+i)^{-mn_k}$$

Sustituyendo los desarrollos binomiales, por sus valores aproximados a los dos primeros términos se tiene

$$(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)(1 - mni) = S_1(1 - mn_1 i) + S_2(1 - mn_2 i) + \ldots + S_k(1 - mn_k i)$$

$$(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)mni = S_1 mn_1 i + S_2 mn_2 i + \ldots + S_k mn_k i$$

de dónde

$$n = \frac{S_1 n_1 + S_2 n_2 + \ldots + S_k n_k}{S_1 + S_2 + \ldots + S_k} \quad \text{(valor aproximado de } n\text{)}$$

7. Un inversionista negocia un pagaré de \$ 20 000 con intereses simples del 12%, con vencimiento a dos años; hallar el valor que debe pagar con la tasa nominal comercial del 10%, con capitalización semestral.

Primero, calculamos el monto del pagaré a su vencimiento y, luego, el valor actual de ese monto.

$$\mathbf{S=C(1+ni)}$$

$C = 20\ 000; \quad n = 2; \quad i = 0{,}12$

$S=20000[1+2(0{,}12)]$

$S = \$\ 24\ 800$

$$C = S\left[1 + \left(\frac{j}{m}\right)\right]^{-mn}$$

$S=24900; \qquad j=0{,}10; \qquad m=2; \quad n=2$

$C = 24\ 800(1 + 0{,}05)^{-4}$

$C = \$\ 20\ 403{,}02$

8. Un pagaré por $ 40 000 se firmó el lo. de marzo de 1980, con vencimiento a 4 años, ganando el interés simple del 12%. El lo. de septiembre de 1981 se negocia con un inversionista que cobra el 14% nominal, con capitalización semestral; hallar el valor pagado por el inversionista.

$$S = C(1 + ni)$$

$$C = 40\ 000; \quad n = 4; \quad i = 0.12$$

$$S = 40\ 000[1 + 4(0{,}12)]$$

$$S = \$59\ 200$$

$$C = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}$$

$$S = 59\ 200; \quad j = 0{,}14; \quad m = 2; \quad n = 2{,}5 \text{ años}$$

$$C = 59\ 200(1 + 0{,}07)^{-5}$$

$$C = \$42\ 208{,}78$$

ANUALIDADES

El objetivo de este capítulo es que usted aprenda a reconocer, definir y clasificar los diferentes tipos de anualidades; que aprenda a identificar y manejar los distintos factores que intervienen en las anualidades. Al terminar el estudio de este capítulo, usted debe ser capaz de calcular: montos o valores futuros, valores actuales o presentes, rentas de anualidades, tasas de interés y tiempos o plazos de anualidades ciertas ordinarias. Deberá ser capaz de crear diagramas de flujo de caja en los que intervienen anualidades ciertas, y plantear y resolver ecuaciones de equivalencia entre anualidades.

6.1 INTRODUCCIÓN

En matemáticas financieras, la expresión anualidad se emplea para indicar el sistema de pago de sumas fijas, a intervalos iguales de tiempo. Se usa la palabra anualidad por costumbre que tiene su origen en las anualidades contingentes, en las que interviene la probabilidad anual de vida de las personas. En finanzas, anualidad no significa pagos anuales sino pagos a intervalos iguales de tiempo. Así son anualidades los dividendos sobre acciones, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos de las compañías de seguro y, en forma más general, los sueldos y todo tipo de rentas son anualidades. La expresión anualidad puede cambiarse por el de rentas, series uniformes, pagos periódicos, amortizaciones u otros, según el caso y las costumbres locales. Nosotros conservamos el nombre de anualidad para el estudio general de todo tipo de pagos periódicos, así, el estudiante no tendrá cambios de len-guaje al estudiar las anualidades contingentes y, con ellas, los seguros de vida.

Definición Una anualidad es una sucesión de pagos periódicos iguales. Si los pagos son diferentes o alguno de ellos es diferente a los demás, la anualidad toma, según el caso, los nombres de anualidades variables (véase 10.10) o anualidades impropias (véase 6.10).

3.2 CLASIFICACION DE LAS ANUALIDADES

Los factores financieros que intervienen en las anualidades y sus formas de pago determinan diferentes tipos de anualidades. Para su estudio ordenado, es necesario clasificarlas y definirlas.

Renta El valor de cada pago periódico recibe el nombre de renta.

Período de pago o período de la renta El tiempo que se fija entre dos pagos sucesivos es el período de pago o período de la renta.

Tiempo o plazo de una anualidad El intervalo de tiempo que trascurre entre el comienzo del primer período de pago y el final del último es el tiempo o plazo de una anualidad.

Renta anual La suma de los pagos hechos en un año es la renta anual.

Tasa de una anualidad El tipo de interés que se fija es la tasa de una anualidad y puede ser nominal o efectiva.
Según su tiempo, las anualidades se agrupan en dos clases:
anualidades ciertas y anualidades eventuales o contingentes. Son anualidades ciertas aquellas anualidades cuyas fechas, inicial y terminal, se conocen por estar estipuladas en forma concreta. Anualidades contingentes son aquellas en las que el primer pago o el último, es decir, la fecha inicial y/o la fecha final dependen de algún suceso previsible, pero cuya fecha de realización no puede fijarse.

Anualidades perpetuas o perpetuidades Son una variación de las anualidades ciertas, en las que la duración del pago es ilimitada.

Según la forma en que se estipule el pago de la renta o anualidad, se originan las anualidades ordinarias o vencidas y las anualidades anticipadas. Una anualidad es ordinaria o vencida, si el pago de la renta se hace al final del período de pago. Es anticipada, si el pago se efectúa al principio del período de pago.

De acuerdo con las definiciones anteriores, las anualidades se clasifican de la siguiente forma:

6.3 ANUALIDADES CIERTAS

Ordinarias o vencidas	Anticipadas
Diferidas	Diferidas
Perpetuas	Perpetuas
Perpetuas diferidas	Perpetuas diferidas

6.4 ANUALIDADES EVENTUALES O CONTINGENTES

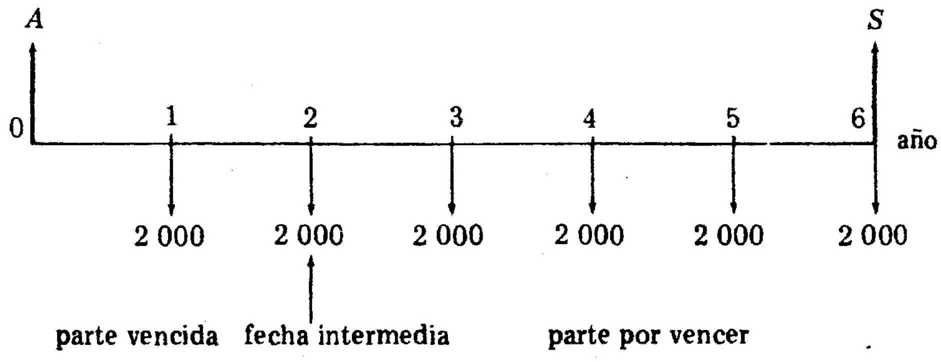
Ordinarias o vencidas	Anticipadas
Diferidas	Diferidas
Perpetuas	Perpetuas
Perpetuas diferidas	Perpetuas diferidas

Cada una de las distintas formas de anualidades presenta variantes en la forma de calcular sus valores, según el número de pagos en el año y número de períodos de capitalizaciones anuales que estipule el tipo de interés.
Si el período de capitalización coincide con el período de pago, se dice que las anualidades son anualidades simples.

Anualidades simples Son aquellas cuyo período de pago coincide con el período de capitalización.

6.5 VALOR DE LAS ANUALIDADES

El valor de una anualidad calculado a su terminación es el monto de ella. El valor de la anualidad calculado a su comienzo es su valor actual o presente. Estos valores pueden, también, calcularse en fechas intermedias; en tal caso, se refiere a: monto de la parte vencida o valor actual de las anualidades por vencer. Así, por ejemplo, una renta de $ 2000 pagaderos cada final de año, durante 6 años, tendrá un monto S, o valor futuro F, al finalizar los 6 años Y tendrá un valor actual o presente A, en su fecha inicial.



Trascurridos 2 años se tiene una fecha intermedia que separa la parte vencida de la anualidad, de la parte por vencer, tal como se muestra en el gráfico.

El cálculo de los valores de las anualidades puede hacerse comenzando con un. caso general que incluya las diferentes formas de anualidades. Pero, desde un punto de vista didáctico, es conveniente guiar el aprendizaje, comenzando por los casos de más frecuente aplicación para finalizar con un tratamiento general de ellas; de acuerdo con este método hemos desarrollado los acápites que siguen.

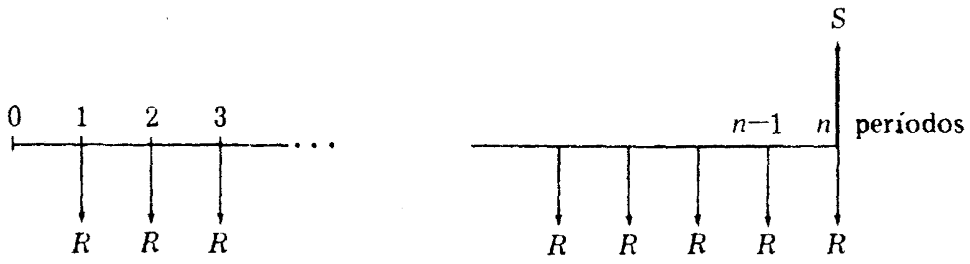
6.6 VALOR FUTURO Y VALOR PRESENTE DE LAS ANUALIDADES SIMPLES CIERTAS YORDINARIAS INMEDIATAS

Este tipo de anualidades es el más frecuente y, por esto, cuando se dice simplemente anualidad, se supone que se trata de una anualidad simple cierta ordinaria. La tasa de interés es, por lo general, una tasa de interés nominal anual. En caso de que la tasa no sea nominal, se aclarará diciendo tasa efectiva anual. Si la tasa dada es nominal, sin especificación de período de capitalización, la tasa efectiva en el período de pago es el cociente entre la tasa nominal y el número anual de pagos.

Símbolos que se utilizan en las anualidades.

R = pago periódico de una anualidad o renta.
i = tasa efectiva por período de capitalización.
j = tasa nominal anual.
m = número de capitalizaciones en el año.
$j_{(m)}$ = tasa nominal con m períodos de capitalizaciones en el año.
n = número de períodos de pago.
S = monto de una anualidad.
A = valor actual o presente de una anualidad.

Cálculo del monto Los pagos R efectuados al final de cada período ganan interés compuesto, hasta la fecha final. Estableciendo la ecuación de equivalencia para la fecha final como fecha focal, tendremos:



Cada pago efectuado al final de período capitaliza los intereses en cada uno de los períodos que le siguen. El primer pago acumula

durante (n — 1) períodos, el segundo (n — 2) períodos y, asi:, s ce. sucesivamente hasta el último pago que no gana intereses, ya que su , pago coincide con la fecha de término.
Los montos respectivos de los pagos R comenzando por el último serán R, R (1 + i), $R(1 + i)^2$, ..., $R(1 + i)^{n-2} + R(1 + n)^{n-1}$
El monto total S de la anualidad es igual a la suma de los montos producidos por las distintas rentas R, o sea:

$$S= R, R(1 + i), R(1 + i)^2, ..., R(1 + i)^{n-2} + R(1 + n)^{n-1}$$

Los términos del segundo miembro forman una progresión geométrica de n términos, razón (1 + i) y primer término R. Aplicando la fórmula de la suma dada en 0.11, se tiene:

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; \qquad S = \frac{R|(1 + i)^n - 1|}{(1 + i) - 1}$$

$$S = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad \textit{(26a)}$$

Si el valor de cada pago R es de una unidad monetaria, el monto S corresponderá al monto de una anualidad de uno por período y se expresa con el símbolo $S_{n\urcorner}$ i ; que se lee s sub n al i; sustituyendo este símbolo en la fórmula (26a), se obtiene:

$$s_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$S = R s_{\overline{n}|\,i} \qquad \textit{(26b)}$$

Notación estándar: $F = R(F/R, \ i\%, \ n)$

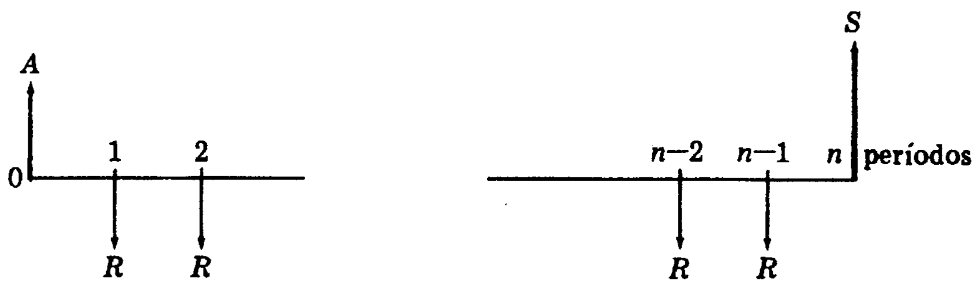
Los valores de $S_{\overline{n|}}\, i$ pueden calcularse con calculadoras actualmente, disponemos de máquinas de calcular que se construyen cada día más completas, manuales y compactas y a precios cada vez más económicos; las calculadoras electrónicas forman par-te hoy del equipo de trabajo de un estudiante. Disponiendo de una calculadora común que tenga una memoria y las funciones logaritmo y exponencial, el estudiante podrá trabajar directamente las operaciones que exigen los problemas. En la práctica, son numerosos los cálculos financieros que se efectúan utilizando tablas; por esta razón es necesario que el estudiante se ejercite en el uso de ellas; la tabla V incluida al final de este libro, tiene los valores de $S_{\overline{n|}}\, i$, calculados para las tasas y números de períodos que utilizan en los problemas que se presentan en esta obra. Algunos autores

expresan i en tanto por ciento y escriben, por ejemplo, $S_{\overline{20|}}\, 3\%$, para expresar el montó de 1 en 20 períodos al 3% efectivo en el período. Nosotros utilizaremos la expresión decimal y escribiremos $S_{\overline{20|}}\, 0.03$

Cálculo del valor actual

Valor actual o presente de una anualidad es aquella cantidad A de dinero que con sus intereses compuestos, en el tiempo de la anualidad, dará un monto equivalente al monto de la anualidad.

Formando la ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal la fecha final, se tiene:



$$A(1+i)^n = S$$

$$A(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si el valor de cada pago R es de una unidad monetaria, el valor actual A es el valor actual de una anualidad de 1 por período y se expresa con el símbolo $a_{\overline{n}|}\, i$ (a sub n al i), sustituyendo este símbolo en (27a), se obtiene:

$$a_{\overline{n}|\, i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = Ra_{\overline{n}|\, i} \qquad (27b)$$

Notación estándar: $P = R\,(P/R,\ i\%,\ n)$

Los valores de $a_{\overline{n}|}\, i$ pueden calcularse por logaritmos; en la práctica, se utilizan para los cálculos, tablas que tienen tabulados estos

valores. La tabla VI incluida al final de este libro, tiene los valores de $a_{\overline{n}|}\, i$ de uso frecuente en los problemas que se ofrecen en esta obra. En la misma forma que el símbolo $S_{\overline{n}|}\, i$, el valor de i acostumbra a expresarse en % y en decimal y se escribe $a_{\overline{20}|}\ 3\%$, para expresar el monto de 1 en 20 períodos al 3%. Nosotros utilizaremos la forma decimal, o sea, el tanto por uno que hemos venido usando en los capítulos anteriores y escribiremos $a_{\overline{20}|}\ 0.03$.

Ejemplo 6.1 Una persona que viaja fuera de su localidad deja una propiedad en alquiler por 5 años, con la condición que se pague $ 9000 por trimestre vencido que serán consignados en una cuenta de ahorros que paga 8% nominal anual. Hallar el monto en los 5 años y el valor actual del contrato de alquiler.

$$S = Rs_{\overline{n}|\, i}$$

$$R = 9000;\quad j = 0{,}08;\quad m = 4;\quad i = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02;\quad n = 4(5) = 20$$

$$S = 9000s_{\overline{20}|\, 0{,}02};\quad \text{en tabla V, } s_{\overline{20}|\, 0{,}02} = 24{,}29736980$$

$$S = 9000(24{,}29736980) = \$\,218\ 676{,}33$$

$$A = Ra_{\overline{n}|\, i} = 9000a_{\overline{20}|\, 0{,}02};\quad \text{en tabla VI, } a_{\overline{20}|\, 0{,}02} = 16{,}35143334$$

$$A = 9000(16{,}35143334) = \$\,147\ 162{,}90$$

Ejemplo 6.2
Hallar el monto y el valor actual de una anualidad de $5000 pagadera semestralmente durante 7 años 6 meses al 8,6%, capitalizable semestralmente.

$R = 5000$; $j = 0{,}086$; $m = 2$; $i = \frac{0{,}086}{2} = 0{,}043$; $n = 7\frac{1}{2}(2) = 15$

$$S = 5000 \cdot \frac{(1 + 0{,}043)^{16} - 1}{0{,}043}$$

Se calcula primero $(1{,}043)_{16} = 1{,}8804623$ (función x^y)

$$S = 5000 \cdot \frac{1{,}880 + 623 - 1}{2{,}043}$$

$S = \$102\,379{,}34$

$$\text{Valor actual } A = R\frac{J\ 1 - (1 + i)^{-n}}{2} = 5000 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}043)^{15}}{0{,}043}$$

Se calcula $(1{,}043)^{-13} = 0{,}5317841$

$$A = 5000 \cdot \frac{1 - 0{,}5317841}{0{,}043}$$

$A = \$\,54\,443{,}71$

Ejemplo 6.3 Número de períodos mayores que el máximo de las tablas.

Cuando el número de períodos es mayor que el máximo de las tablas, los valores se calculan aplicando los métodos que se indican en los problemas 8 y 18 de este capítulo. En este ejemplo, desarrollaremos una solución que es de uso frecuente

Hallar el monto y el valor actual de una anualidad de $100 mensuales pagaderos durante 15 años, al 9% nominal convertible mensualmente.

$$R = 100;\ j = 0{,}09;\ m = 12;\ i = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075;\ n = 15(12) = 180$$

$$S = 100s_{\overline{180}|0{,}0075}$$

$$S = 100\frac{(1 + 0{,}0075)^{180} - 1}{0{,}0075}$$

$$(1{,}0075)^{180} = (1{,}0075)^{100}(1{,}0075)^{80} \text{ utilizando la tabla I}$$

$$(1{,}0075)^{180} = 2{,}11108384(1{,}81804398) = 3{,}83804327$$

$$S = 100\frac{2{,}83804327}{0{,}0075} = \$\,37\,840{,}57$$

valor actual $A = 100a_{\overline{180}|0{,}0075}$

$$A = 100\frac{1 - (1 + 0{,}0075)^{-180}}{0{,}0075}$$

$$(1{,}0075)^{-180} = (1{,}0075)^{-100}(1{,}0075)^{-80} \text{ utilizando la tabla II}$$

$$(1{,}0075)^{-180} = (0{,}47369033)(0{,}55004170) = 0{,}26054942$$

$$A = 100\frac{1 - 0{,}26054942}{0{,}0075} = 100\frac{0{,}73945058}{0{,}0075}$$

$$A = \$\,9859{,}34$$

(capítulo 6 primer grupo)

6.7 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una persona deposita $ 2000 al final de cada año, durante 15 años, en una cuenta de ahorros que paga el 8% de interés. Hallar el monto al efectuar el último pago.

$$R = 2000;\ i = 0{,}08;\ n = 15$$

$$S = Rs_{\overline{n}|i} = 2000s_{\overline{15}|0{,}08}$$

$$S = 2000(27{,}15211393) = \$\,54\,304{,}23$$

2. Una persona desea comprar una renta de $ 20 000 pagadera semestralmente, durante los próximos 10 años. Hallar a la tasa del 6% el costo de la anualidad.

$$R = 20\,000;\ j = 0{,}06;\ m = 2;\ i = 0{,}03;\ n = 2(10) = 20$$

$$A = Ra_{\overline{n}|i} = 20\,000a_{\overline{20}|0{,}03}$$

$$A = 20\,000(14{,}87747486) = \$\,297\,549{,}50$$

3. Una compañía vende neveras con una cuota inicial de $ 1000 y 16 cuotas mensuales de $ 500. Si se carga el 15% con capitalización mensual, hallar el valor de contado.

valor de contado = cuota inicial + valor actual de las mensualidades

valor de contado = cuota inicial + $Ra_{\overline{n|}\,i}$

cuota inicial = 1000; $R = 5000$; $n = 16$; $j = 0{,}15$; $m = 12$;

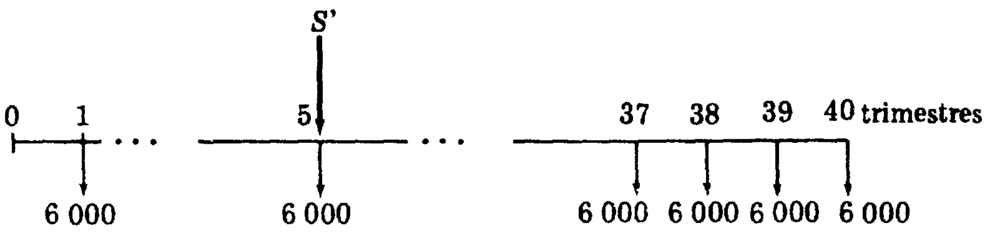
$$i = \frac{0{,}15}{12} = 0{,}0125$$

valor de contado = $1000 + 500a_{\overline{16|}\,0{,}0125}$

valor de contado = $1000 + 500(14{,}42029227) = \$8210{,}15$

4. Una persona debe pagar una anualidad de $ 6000 trimestrales durante 10 años. Si no efectúa los 4 primeros pagos, ¿cuánto debe pagar al vencer la quinta cuota, para poner al día su deuda, si la tasa de la operación es del 10%, con capitalización trimestral?

Se calcula el monto parcial hasta el quinto pago.



S' = monto parcial; $R = 6000$; $j = 0{,}10$; $m = 4$; $i = \dfrac{0{,}10}{4} = 0{,}025$; $n = 5$

$$S' = 6000s_{\overline{5|}\,0{,}025} = 6000(5{,}25632852) = \$\,31\,537{,}97$$

5. Resolver el problema 1, utilizando una calculadora. S=R(1+—1

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$R = 2000;\quad i = 0{,}08;\quad n = 15$$

$$(1 + 0{,}08)^{15} = 3{,}1721691$$

$$3{,}1721691 - 1 = 2{,}1721691$$

$$2{,}1721691 \div 0{,}08 = 27{,}15211375$$

$$27{,}15211375(2000) = \$\,54\,304{,}23$$

6. Resolver el problema 2, utilizando una calculadora

$$A = R\frac{1-(1+i)^{n}}{i}$$

$$R = 20\,000;\ \ j = 0{,}06;\ \ m = 2;\ \ i = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03;\ \ n = 2(10) = 20$$

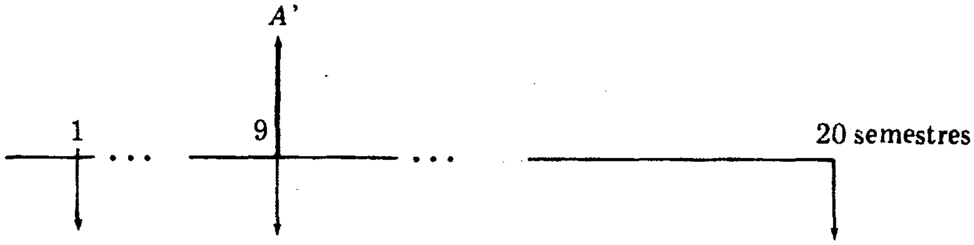
$(1 + 0{,}03)^{-20} = 0{,}55367575$ entra en memoria

$1 - MR = 0{,}44632425$

$0{,}44632425 \div 0{,}03 = 14{,}877475$

$14{,}877475(20\,000) = \$\,297\,540{,}50$

7. Una persona debe pagar durante 10 años una anualidad de $ 5000 semestrales pactados al 8%. Al efectuar el noveno pago, desea liquidar el saldo con un pago único. ¿Cuánto debe pagar en la fecha del noveno pago, para liquidar la deuda?



Al efectuar el noveno pago quedan 20 − 9 = 11 pagos

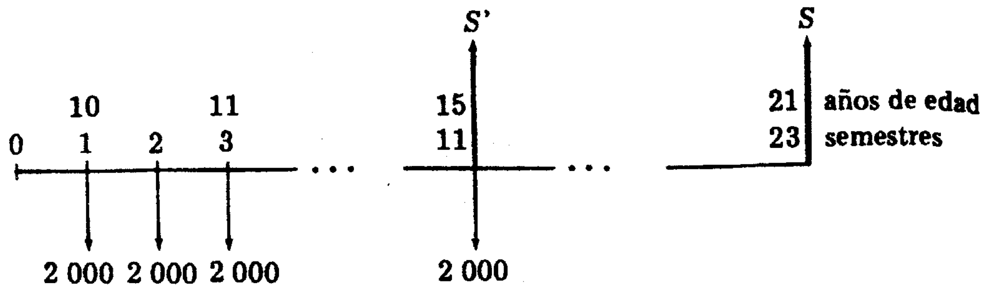
Pago único $= R + A'$ **(*R* es el valor de cada anualidad y *A'* el valor actual de los 11 pagos pendientes)**

$$R = 5000;\ \ j = 0{,}08;\ \ m = 2;\ \ i = \frac{0{,}08}{2} = 0{,}04$$

pago único $= 5000 + 5000a_{\overline{11}|0{,}04} = 5000 + 5000(8{,}76047671)$

pago único $= \$\,48\,802{,}38$

8. Al cumplir su hijo 10 años, el padre decide consignar semestralmente en una cuenta de ahorros, que paga el 9% nominal, la cantidad de $ 2000. Si hace estas consignaciones durante 5 años consecutivos, calcular la cantidad que tendrá en su cuenta el hijo, al cumplir 21 años.



Primero se calcula el monto S' de las consignaciones, durante 5 años.

$$R = 2000;\quad j = 0{,}09;\quad m = 2;\quad i = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045;\quad n = 11$$

$$S' = 2000 s_{\overline{11}|\,0{,}045} = 2000(13{,}84117879)$$

$$S' = \$\,27\ 682{,}36$$

Cuando el hijo cumple 15 años, hecho el último pago, el monto es de $ 27 682,36 y esta suma gana interés compuesto durante 12 períodos, hasta que el hijo cumpla 21 años de

$$S = C(1 + i)^n$$

$$C = \$\,27\ 682{,}36;\quad i = 0{,}045;\quad n = 2(6) = 12$$

$$S = \$\,27\ 682{,}36(1 + 0{,}045)^{12}$$

$$S = \$\,27\ 682{,}36(1{,}69588143) = \$\,46\ 946$$

9. Demostrar que $(1 + i)s_{\overline{n}|\,i} = s_{\overline{n+1}|\,i} - 1$

$$(1 + i)s_{\overline{n}|\,i} = (1 + i)\frac{(1 + i)^n - 1}{i} = \frac{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)}{i}$$

$$(1 + i)s_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1 + i)^{n+1} - 1 - i}{i} = \frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}$$

$$(1 + i)s_{\overline{n}|\,i} = s_{\overline{n+1}|\,i} - 1$$

10. Demostrar que $a_{\overline{h+k}|\,i} = a_{\overline{h}|\,i} + (1 + i)^{-h} a_{\overline{k}|\,i}$

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1 - (1 \cdot i)^{-h-k}}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1 - (1 + i)^{-h} + (1 + i)^{-h} - (1 + i)^{-h-k}}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = \frac{1 - (1 + i)^{-h}}{i} + \frac{(1 + i)^{-h}[1 - (1 + i)^{-k}]}{i}$$

$$a_{\overline{h+k}|\,i} = a_{\overline{h}|\,i} + (1 + i)^{-h} a_{\overline{k}|\,i}$$

CALCULO DE LA TASA DE INTERÉS, RENTA Y TIEMPO DE UNA ANUALIDAD SIMPLE CIERTA ORDINARIA

El objetivo de este capítulo es que el alumno sea capaz de calcular el monto de las anualidades simples, ciertas y ordinarias que le permitirán saber cuánto debe de pagar periódicamente para cancelar el valor de una deuda en un cierto período de tiempo, así como podrá determinar la tasa de interés de las mismas.

Es frecuente e importante la necesidad de conocer el importe de los pagos periódicos, para lograr un determinado resultado; así, por ejemplo: ¿Cuál es el pago mensual que debe hacerse para can-celar el valor de una propiedad, en un cierto número de años? ¿Qué cantidad de dinero habrá que colocar periódicamente, en un fondo de amortización, para cancelar una obligación a largo plazo? ¿Con qué cuotas periódicas puede cancelarse una mercancía, conocido su valor de contado y la tasa de interés?
Dos son los problemas que se presentan, según se conozca: el monto a cancelar en fecha futura o el valor actual que debe cancelarse, mediante pagos periódicos.

(a) Cálculo de la renta cuando se conoce el monto

De la fórmula *(26b)* $S = Rs_{\overline{n|}\,i}$

Se obtiene $$R = S\frac{1}{s_{\overline{n|}\,i}} \qquad (28)$$

Notación estándar: $A = F(A/F, i\%, n)$

El símbolo $\frac{1}{s_{\overline{n|}\,i}}$ recibe el nombre de ***factor del fondo de*** amortización y es el valor de la renta de una anualidad cuyo monto ascenderá a una unidad monetaria, después de n pagos, a la tasa i por período de pago. El valor de este factor, para las tasas que con frecuencia se utilizan en esta obra, se encuentran en la tabla VII para valores de n desde 1 hasta 100.

(b) Cálculo de la renta, cuando se conoce el valor actual.

De la fórmula *(27b)* $A = Ra_{\overline{n|}\,i}$

Se obtiene $$R = A\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} \qquad (29)$$

Notación estándar: $A = P(A/P, i\%, n)$

El símbolo $\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}}$ recibe el nombre de ***factor de amortiza***ción y es el valor de la renta de una anualidad que amortiza una deuda de una unidad monetaria, en n pagos, a la tasa i por período de pago. En esta obra, no hemos incluido la tabla para los valores del factor de amortización; el lector deberá calcular los valores de $\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}}$ utilizando la tabla VII que tiene los valores de $\frac{1}{s_{\overline{n|}\,i}}$ y aprovechando la siguiente relación:

De *(26a)* $$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Se obtiene $$\frac{1}{s_{\overline{n|}\,i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

De *(27a)* $$a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Se obtiene $$\frac{1}{a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Sumando i al valor de $\frac{1}{s_{\overline{n}|\,i}}$, se obtiene

$$i + \frac{1}{s_{\overline{n}|\,i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i = \frac{i + i(1+i)^n - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$i + \frac{1}{s_{\overline{n}|\,i}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}, \text{ de donde}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|\,i}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|\,i}} + i \qquad (30)$$

Los valores de $\frac{1}{a_{\overline{n}|\,i}}$ se obtienen sumando i al correspondiente valor de $\frac{1}{s_{\overline{n}|\,i}}$.

Ejemplo 6.4 Calcular los depósitos semestrales necesarios en una cuenta de ahorros que paga el 8% con capitalización semestral, para obtener en 5 años un capital de $ 20 000.

$$R = S\frac{1}{s_{\overline{n}|\,i}}$$

$$S = 20\,000;\ j = 0{,}08;\ m = 2;\ i = \frac{0{,}08}{2} = 0{,}04;\ n = 2(5) = 10$$

$$R = 20\,000\frac{1}{s_{\overline{10}|\,0{,}04}} = 20\,000(0{,}08329094)$$

$$R = \$\,1665{,}82$$

Ejemplo 6.5 Calcular los pagos por semestre vencido, necesarios para cancelar el valor de $100 000 de una propiedad comprada a 8 años plazo con el interés del 9% capitalizable semestralmente.

$$R = A\frac{1}{a_{\overline{n}|\,i}}$$

$$A = 100\,000;\ j = 0{,}09;\ m = 2;\ i = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045;\ n = 8(2) = 16$$

$$R = 100\,000\frac{1}{a_{\overline{16}|\,0{,}045}} = 100\,000\left(\frac{1}{s_{\overline{16}|\,0{,}045}} + i\right)$$

$$\frac{1}{s_{\overline{16}|\,0{,}045}} = 0{,}04401537$$

$$\frac{1}{a_{\overline{16}|\,0{,}045}} = 0{,}04401537 + 0{,}045 = 0{,}08901537$$

R = 100 000 (0,08901537)
Pagos semestrales = R = $ 8901,54

6.10 CALCULO DEL TIEMPO O PLAZO DE UNA ANUALIDAD

Si en (26a) o (27a) se conocen el monto S o el valor actual A, la tasa y la renta R, puede calcularse el valor de n o sea el número de pagos.
Utilizando logaritmos, (26a) y (27a), pueden resolverse paran; así por ejemplo :

$$(26a) \qquad S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$Si = R(1+i)^n - R$$

$$R(1+i)^n = Si + R$$

$$\log R + n \log(1+i) = \log(Si + R)$$

$$n \log(1+i) = \log(Si + R) - \log R$$

$$n = \frac{\log(Si + R) - \log R}{\log(1+i)}$$

En la práctica, el cálculo de n se efectúa utilizando ecuaciones de equivalencia, interpolando entre dos valores de las tablas, o utilizando computadores programados.

Ejemplo 6.6 ¿Cuántos pagos semestrales de $ 600 deberán hacerse para cancelar una deuda de $ 4500, con el 7% de interés capitalizable semestralmente?
$ 4500 es el valor actual de la deuda; para el cálculo del número de pagos, aplicamos:

$$A = Ra_{\overline{n|}i}$$

$$A = 4500; \quad R = 600; \quad j = 0{,}07; \quad m = 2; \quad i = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035$$

$$4500 = 600a_{\overline{n|}0{,}035}$$

$$a_{\overline{n|}0{,}035} = \frac{4500}{600} = 7{,}5$$

En la tabla VI, columna del 3 $^1/_2$ %, no existe para n entero el valor 7,5, ya que este valor se encuentra comprendido entre:

$$a_{\overline{8|}0{,}035} = 6{,}87395554 \text{ y } a_{\overline{9|}0{,}035} = 7{,}60768651$$

Si por algún motivo se necesita calcular un valor decimal aproximado del número de períodos, puede procederse por interpolación así:

a 9 corresponde 7,60768651	a n corresponde 7,50000000
a 8 corresponde 6,87395554	a 8 corresponde 6,87395554

1 es a 0,73373097 como $n-8$ es a 0,62604446

$$\frac{1}{0{,}73373097} = \frac{n-8}{0{,}62604446}$$

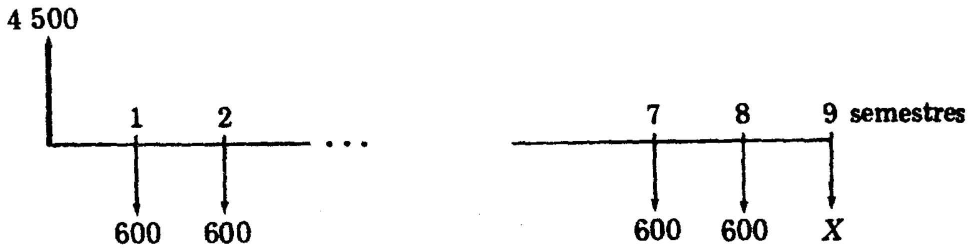
$$n-8 = \frac{0{,}62604446}{0{,}73373097} = 0{,}853$$

$$n = 8{,}853 \text{ períodos semestrales}$$

En las actividades financieras se acostumbra a dar soluciones prácticas, optando por cualquiera de las dos alternativas que se expresan a continuación:

(a) Aumentar el pago correspondiente al último período entero. (En nuestro caso, el 8)
(b) Utilizar el entero superior, efectuando un pago ,menor en el último período. (En nuestro ejemplo, se trabajaría con 9 períodos efectuando un pago menor, al final del noveno período.)

Estas soluciones no enteras dan origen a las anualidades impropias o variables que son aquellas cuyos pagos o rentas no son iguales.
Si en nuestro ejemplo optamos por la alternativa (b), se tendrá que efectuar un último pago menor que los anteriores y suficiente para cancelar exactamente el saldo remanente que queda después de efectuar los 8 primeros pagos. Para calcular el valor del último pago, se plantea una ecuación de equivalencia. Escogiendo la fecha inicial, como fecha focal, tendremos para A = 4500; R= 600; j= 0,07; m = 2 ;i = $^{0.07}/_{2}$ = 0,035; n = 9.



$$4500 = 600a_{\overline{8}|\,0{,}035} + X(1 + 0{,}035)^{-9}$$

$$4500 = 600(6{,}87395554) + X(0{,}73373097)$$

$$4500 = 4124{,}37 + 0{,}73373097X$$

$$X = \frac{4500 - 4124{,}37}{0{,}73373097} = \$\,511{,}94$$

La anualidad, en este caso impropia, está formada por 8 pagos semestrales de $ 600 c/u y un último pago de $ 511,94, al final del noveno semestre.
Para el cálculo del último pago, pudimos aprovechar la interpolación hecha anteriormente y tendríamos:

$$\frac{0{,}62604446}{0{,}73373097}(600) = 511{,}94$$

Para demostrar que las dos formas de cálculo son iguales, basta observar que 0,62604446 = 7,5000000 − 6,87395554 y que

$$(600)\frac{0{,}62604446}{0{,}73373097} = \frac{7{,}5000000 - 6{,}87395554}{0{,}73373097}(600) =$$

$$\frac{4500 - 4124{,}37}{0{,}73373097} = \$\,511{,}94$$

Observe también que $a_{\overline{9}|i} - a_{\overline{8}|i} = (1 + i)^{-9}$

Demostración $\dfrac{1-(1+i)^{-9}}{i} - \dfrac{1-(1+i)^{-8}}{i} =$

$$\frac{(1+i)^{-8} - (1+i)^{-9}}{i}$$

$$a_{\overline{9}|i} - a_{\overline{8}|i} = \frac{(1+i)^{-9}\,[(1+i) - 1]}{i} = (1+i)^{-9}$$

Para una demostración general de que la interpolación obtenida multiplicada por la renta es igual al valor encontrado por medio de ecuaciones de equivalencia, estudie el problema 58.

De lo anterior, podemos enunciar: cuando el valor $a_{\overline{n}|i} = A/R$ es resuelto por interpolación, la parte decimal de n es la parte de la renta R que debe pagarse en el final del período, que corresponde al entero superior, para cubrir totalmente el valor de la anualidad.

6.11 CALCULO DE LA TASA DE INTERES DE UNA ANUALIDAD SIMPLE CIERTA ORDINARIA

La tasa i de una anualidad puede ser incógnita, cuando se conocen los demás elementos de una anualidad; por lo general, los valores de i, correctos desde un punto de vista matemático, resultan ficticios en la práctica. Así, por ejemplo, si el cálculo da para i el valor 7,32563%, desde el punto de vista matemático, es correcto, pero tal valor no es utilizado en la práctica y se tomará como tasa aproximada el valor $7\,^{1}/_{3}$ %.

La tasa aproximada de interés es costumbre calcularla por interpolación, con lo que se obtienen valores suficientemente aproximados para cualquier propósito. Este método puede ilustrarse con el ejemplo que sigue:

Ejemplo 6.7 Una compañía de seguros ofrece, por un pago inmediato de $ 90 000, una renta de $ 5000 pagadera durante 30 años, al comprador o a sus herederos. ¿Qué tasa de interés abona la compañía de seguros?

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{A}{R}$$

$$A = 90\,000; \quad R = 5000; \quad n = 30$$

$$a_{\overline{30}|i} = \frac{90\,000}{5000} = 18$$

Para encontrar los valores de entre los cuales se halle comprendido el valor 18,000000, buscamos en la tabla VI, en la línea correspondiente a n 30. Estos valores son:

para $a_{\overline{30}|i} = 17{,}29203330; \quad i = 0{,}04$

para $a_{\overline{30}|i} = 18{,}39204541; \quad i = 0{,}035$

Observe que, mientras los valores de $a_{\overline{30}|i}$ aumentan, los valores de i disminuyen.

Para nuestro valor $a_{\overline{30}|i} = 18$, calculamos i por interpolación.

a 0,035 corresponde 18,39204541	a i corresponde 18,00000000
a 0,040 corresponde 17,29203330	a 0,040 corresponde 17,29203330
−0,005 es a 1,10001211	como $i - 0{,}040$ es a 0,70796670

$$\frac{-0{,}005}{1{,}10001211} = \frac{i - 0{,}040}{0{,}70796670}$$

$$i - 0{,}040 = \frac{(-0{,}005)(0{,}70796670)}{1{,}10001211} = -0{,}003218$$

$$i = 0{,}036782$$

tasa = 3,6782 (tasa matemática)

tasa = $3^3/_4$ % (tasa práctica o real)

Ejemplo 6.8 Una persona ha depositado, al final de cada mes, $1000 en una cuenta de ahorros; al cabo de 5 años, tiene en su cuenta la suma de $ 70 542. ¿Qué tasa nominal promedio ha ganado?

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R}$$

S = 70 542; R = 1000; m = 12; n = 5(12) = 60 períodos

Para encontrar los valores de $s_{\overline{60}|\, i}$, entre los cuales se halle comprendido

el valor $s_{\overline{60}|\, i} = \dfrac{70\,542}{1000} = 70{,}542$, buscamos en la tabla V en la línea correspondiente a $n = 60$.

Estos valores son:

Para $i = 0{,}005$; $(^1/_2\%)$; $s_{\overline{60}|\, i} = 69{,}77003051$

Para $i = 0{,}00583$; $(^7/_{12}\%)$; $s_{\overline{60}|\, i} = 71{,}59290165$

Para nuestro valor $s_{\overline{60}|\, i} = 70{,}542$ calculamos i por interpolación.

a 0,00583 corresponde 71,59290165	a i corresponde 70,54200000
a 0,00500 corresponde 69,77003051	a 0,005 corresponde 69,77003051
0,00083 es a 1,82287114	como $i - 0{,}005$ es a 0,77196949

$$\frac{0{,}00083}{1{,}82287114} = \frac{i - 0{,}005}{0{,}77196949}$$

$$i - 0{,}005 = \frac{0{,}00083(0{,}77196949)}{1{,}82287114}$$

$$i - 0{,}005 = 0{,}00035$$

$$i = 0{,}00535 \text{ (mensual)}$$

tasa = 0,00535(12) = 0,0642 (matemática)

tasa = $6^1/_2$ % nominal anual (práctica)

(Capítulo 6, segundo grupo)

6.12 Problemas resueltos

29. Un comerciante vende televisores en 6500, precio de contado. Para promover sus ventas, idea el siguiente plan de ventas a plazos, con cargo del 1% mensual de intereses. Cuota inicial de $1200 y el saldo en 18 abonos mensuales. ¿Cual es el valor de las mensualidades?

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|\, i}}$$

$$A = 6500 - 1200 = 5300; \quad n = 18; \quad i = 0{,}01$$

$$R = \frac{5300}{a_{\overline{18}|\, 0{,}01}} = \frac{5300}{16{,}39826858}$$

$R = \$\,323{,}20$ valor cuota mensual

30. Para mantener en buen estado cierto puente, es necesario repararlo cada 6 años con un costo de $ 85 000. El concejo del municipio al cual pertenece el puente decide establecer una reserva anual para proveer los fondos necesarios con mi-ras a las reparaciones futuras del puente. Si esta reserva se deposita en una cuenta que abona el 8% de interés, hallar el monto de la reserva anual.

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n|}\,i}}$$

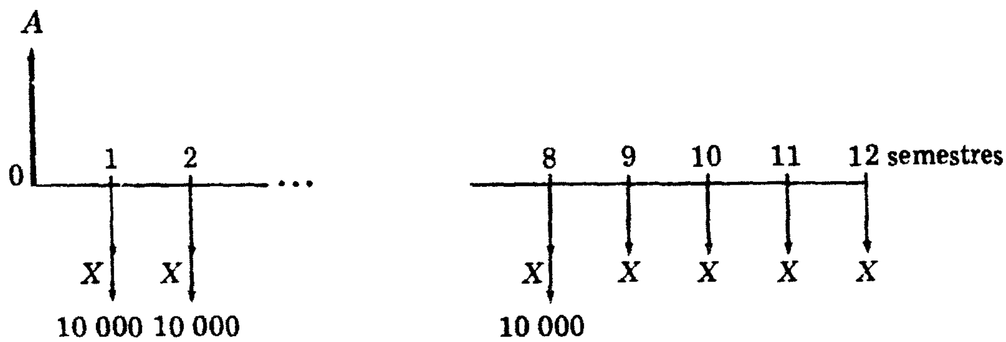
$$S = 85\,000; \quad i = 0{,}08; \quad n = 6$$

$$R = \frac{85\,000}{s_{\overline{6|}\,0{,}08}} = \frac{85\,000}{7{,}33592904}$$

$$R = \$\,11\,586{,}81$$

31. Una obligación debe cancelarse en 4 años, con pagos semestrales de $10 000. El deudor conviene con su acreedor en cancelar la deuda en 6 años, con abonos semestrales. Hallar el valor de los nuevos pagos, si la tasa pactada es del 109 convertible semestralmente.

Designemos por X los nuevos pagos y establezcamos la ecuación de equivalencia, utilizando como fecha focal la fecha inicial.



$$10\,000\,a_{\overline{8|}\,0{,}05} = X a_{\overline{12|}\,0{,}05}$$

$$X = \frac{10\,000\,a_{\overline{8|}\,0{,}05}}{a_{\overline{12|}\,0{,}05}} = \frac{64632{,}1276}{8{,}86325164}$$

$$X = \$\,7292{,}15$$

32. Un empleado puede ahorrar $ 800 mensuales e invertirlos en una compañía financiera que abona el 9%, convertible mensualmente. ¿En cuánto tiempo juntará $ 55 000? Calcular el tiempo y el depósito final.

$$S = Rs_{\overline{n}|\, i}$$

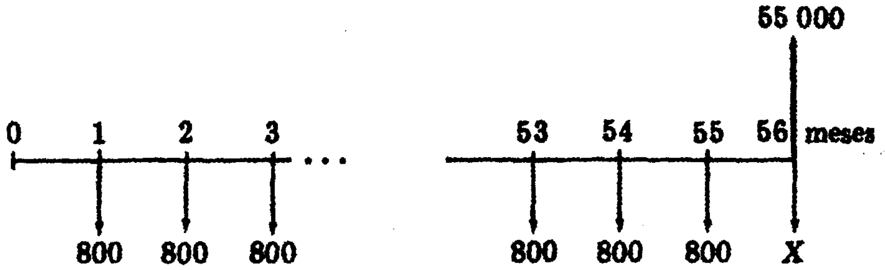
$$S = 55\,000;\quad R = 800;\quad j = 0{,}09;\quad m = 12;\quad i = 0{,}0075$$

$$s_{\overline{n}|\, 0{,}0075} = \frac{55\,000}{800} = 68{,}75$$

En la tabla V en la columna de $i = 0{,}0075$; ($^3/_4$%).
Encontramos

$$s_{\overline{55}|\, 0{,}0075} = 67{,}76883409 \text{ y } s_{\overline{56}|\, 0{,}0075} = 69{,}27710035$$

0 sea que el empleado debe hacer 65 depósitos de $ 800 y un último depósito X, al final del mes 56. Para determinar el valor de X, planteamos una ecuación de equivalencia escogiendo como fecha focal el final del mes 56.



$$55\,000 = 800 s_{\overline{55}|\, 0{,}0075}\,(1 + 0{,}0075) + X$$

En el problema 7, demostramos que $s_{\overline{n}|\, i}(1+i) = s_{\overline{n+1}|\, i} - 1$ o sea $X = 55\,000 - 800(s_{\overline{56}|\, 0{,}0075} - 1)$.

$$X = 55\,000 - 800(68{,}27710035) = 55\,000 - 54\,621{,}68$$

$$X = \$\,378{,}32$$

Si esta mismo problema se resuelve por interpolación, se tiene

a 56 corresponde 69,27710035	a n corresponde 68,75000000
a 55 corresponde 67,76883409	a 55 corresponde 67,76883409
1 es a 1,50826626	como $n - 55$ es a 0,98116591

$$\frac{1}{1{,}50826626} = \frac{n-55}{0{,}98116591}$$

$$n - 55 = \frac{0{,}98116591}{1{,}50826626} = 0{,}6505$$

La interpretación de la parte decimal, o fracción de período, es distinta de la interpretación dada en el ejemplo 6.6 para $a_{\overline{n}|\, i} = {}^{A}/_{R}$; en efecto, si en la proporción

$$\frac{1}{1{,}50826626} = \frac{n-55}{0{,}98116591}$$

remplazamos: $1{,}50826626 = s_{\overline{56}|\,i} - s_{\overline{55}|\,i}$

$$0{,}98116591 = s_{\overline{n}|\,i} - s_{\overline{55}|\,i}$$

$$n - 55 = 0{,}6505 = \frac{s_{\overline{n}|\,i} - s_{\overline{55}|\,i}}{s_{\overline{56}|\,i} - s_{\overline{55}|\,i}}$$

pero: $s_{\overline{n}|\,i} = \frac{S}{R}$; $s_{\overline{56}|\,i} = s_{\overline{55}|\,i}(1+i) + 1$; $s_{\overline{56}|\,i} - s_{\overline{55}|\,i} = s_{\overline{55}|\,i}(1+i) + 1 - s_{\overline{55}|\,i}$

de donde: $$0{,}6505 = \frac{\frac{S}{R} - s_{\overline{55}|\,i}}{s_{\overline{55}|\,i}(1+i) + 1 - s_{\overline{55}|\,i}} = \frac{\frac{S}{R} - s_{\overline{55}|\,i}}{is_{\overline{55}|\,i} + 1}$$

como $is_{\overline{55}|\,i} + 1 = i\frac{(1+i)^{55} - 1}{i} + 1 = (1+i)^{55}$

luego $$0{,}6505 = \frac{\frac{S}{R} - s_{\overline{55}|\,i}}{(1+i)^{55}} = \frac{S - Rs_{\overline{55}|\,i}}{R(1+i)^{55}}$$

o sea $0{,}6505\,R(1+i)^{55} = S - Rs_{\overline{55}|\,i}$

para $R = 800$; $i = 0{,}0075$

$$520{,}40(1 + 0{,}0075)^{55} = S - Rs_{\overline{55}|\,0{,}0075}$$

$S - Rs_{\overline{55}|\,i}$ es el saldo al final de 55 períodos y es igual a 0,6505 $R(1 + i)^{55}$ que es el valor al cabo de 55 períodos de 0,6505 R pagados en la fecha inicial de la anualidad. En nuestro caso, el pago inicial sería de $ 520,40.

Para una demostración general, estudie el problema 59. De lo anterior, podemos enunciar: Si el valor $s_{\overline{n}|\,i} = S/R$ es resuelto por interpolación, la parte decimal de n es la parte de la renta R que debe pagarse en la fecha inicial, para cubrir el valor total de la anualidad en un número de períodos igual al entero que resulta de despreciar la parte decimal de n.

33. Cierta máquina puede ser comprada con $ 4590 al contado o $ 450 de cuota inicial y 18 cuotas mensuales de $ 280 c/u; calcular: (a) la tasa nominal de interés cargado, (b) la tasa efectiva de interés cargado.

(a) $$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{A}{R}$$

$$A = 4590 - 450 = 4140;\quad n = 18;\quad m = 12;\quad R = 280$$

$$a_{\overline{18}|\,i} = \frac{4140}{280} = 14{,}785714$$

En la tabla VI, encontramos que para $n = 18$, $a_{\overline{18}|\,0{,}02} = 14{,}99203125$ y $a_{\overline{18}|\,0{,}025} = 14{,}35336363$ o sea que i está comprendido entre 2% y $2^1/_2$% y la tasa nominal entre 24% v 30%. Para afinar el resultado, procedemos por interpolación.

a 0,020 corresponde 14,99203125	a i corresponde 14,78571400
a 0,025 corresponde 14,35336363	a 0,025 corresponde 14,35336363

$-0{,}005$ es a $0{,}63866762$ como $i - 0{,}025$ es a $0{,}43235037$

$$\frac{-0{,}005}{0{,}63866762} = \frac{i - 0{,}025}{0{,}43235037}$$

$$i - 0{,}025 = \frac{-0{,}005(0{,}43235037)}{0{,}6386676} = 0{,}0033847$$

$$i = 0{,}0216153$$

Tasa anual, convertible mensualmente = 0,0216153(12)(100) = 25,93836%

Tasa práctica = 26% convertible mensualmente.

(b) Designando por i la tasa efectiva se tiene para j = 0,26; m = 12 aplicando (20)

$$i = (1 + \frac{0{,}26}{12})^{12} - 1$$

$$i = 29{,}33\%$$

34. Resolver el problema 32, utilizando una calculadora.

$$S = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$S = 55\,000; \quad R = 800; \quad j = 0{,}09; \quad m = 12; \quad i = 0{,}0075$$

$$(1 + i)^n = \frac{Si}{R} + 1$$

$$(1{,}0075)^n = \frac{55\,000(0{,}0075)}{800} + 1$$

$$(1{,}0075)^n = 1{,}515625$$

$$n = \frac{\ln(1{,}515625)}{\ln(1{,}0075)} = 55{,}6514$$

0 sea, que debe hacer 55 depósitos de $ 800, para calcular el último pago; al final del mes 56 se tiene:

$$55\,000 = 800\frac{1{,}0075^{55} - 1}{0{,}0075}(1{,}0075) + x$$

$$55\,000 = 54\,621{,}68504 + x$$

$$x = \$\,378{,}31 \text{ último pago}$$

35. Resolver el problema 33, utilizando una calculadora.

En este caso, se procede por aproximaciones sucesivas; se ha anotado las distintas aproximaciones, no obstante que al operar no se anotan.

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R}$$

$$A = 4590 - 450 = 4140; \quad n = 18; \quad m = 12; \quad R = 280$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{4140}{280} = 14{,}785714$$

Los primeros valores son, por tanteo:

para: $i = 0{,}02; \quad \frac{1-(1{,}02)^{-18}}{0{,}02} = 14{,}992031$

$$i = 0{,}03; \quad \frac{1-(1{,}03)^{-18}}{0{,}03} = 13{,}753513$$

$$i = 0{,}025; \quad \frac{1-(1{,}025)^{-18}}{0{,}025} = 14{,}353363$$

$$i = 0{,}021; \quad \frac{1-(1{,}021)^{-18}}{0{,}021} = 14{,}861050$$

$$i = 0{,}0215; \quad \frac{1-(1{,}0215)^{-18}}{0{,}0215} = 14{,}796179$$

$$i = 0{,}0216; \quad \frac{1-(1{,}0216)^{-18}}{0{,}0216} = 14{,}783254$$

i = 0,216 es una aproximación aceptable para nuestro problema.

Tasa nominal anual convertible mensualmente = 0,0216(100)(12) = 25,92%
Tasa práctica = 26% convertible mensualmente.

(b) La misma respuesta que en el problema 33.

36. Una persona compra una póliza que le asegura una renta de $ 20 000 cada final de año, durante los próximos 15 años. Desea cambiar su póliza por otra que le asegure una renta de $ 30 000. ¿Durante cuánto tiempo recibirá la nueva renta, si la tasa de interés es 8%?

Formamos una ecuación de equivalencia con los valores actuales en la fecha inicial

$$20\,000 a_{\overline{15}|0,08} = 30\,000 a_{\overline{n}|0,08}$$

$$a_{\overline{n}|0,08} = \frac{20\,000 a_{\overline{15}|0,08}}{30\,000}$$

$$a_{\overline{n}|0,08} = \frac{20\,000(8,55947869)}{30\,000} = 5,706319$$

En la tabla VI, columna del 8%, encontramos $a_{\overline{7}|0,08} = 5,20637006$ y $a_{\overline{8}|0,08} = 5,74663894$; entre estos valores interpolamos.

a 8 corresponde	5,74663894		a n corresponde		5,70631900
a 7 corresponde	5,20637006		a 7 corresponde		5,20637006
1 es a	0,54026888	como	$n-7$	es a	0,49994894

$$\frac{1}{0,54026888} = \frac{n-7}{0,49994894}$$

$$n-7 = \frac{0,49994894}{0,54026888} = 0,9253704$$

$$n = 7,9253704$$

Recibiría la renta de $ 30,000 durante 7 años y un pago final al terminar el octavo año de 0,9253704 (30,000) = $ 27, 761.11

ANUALIDADES ANTICIPADAS

En este capítulo, usted aprenderá a reconocer y definir los factores que intervienen .en el cálculo de los valores de las anualidades anticipadas, estudiará el desarrollo de fórmulas y métodos matemáticos para el cálculo del: monto o valor futuro, valor actual o presente, rentas, tasas y plazos. Aprenderá métodos para plantear ecuaciones de equivalencia entre anualidades vencidas y anticipadas y practicará diagramas de flujos de caja.
Al terminar el estudio del capítulo usted debe ser capaz de dibujar diagramas de flujo de caja de anualidades anticipadas, plantear ecuaciones de equivalencia y calcular por diferentes métodos, montos, valores actuales o presente, rentas, tasas y plazos de anualidades anticipadas.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

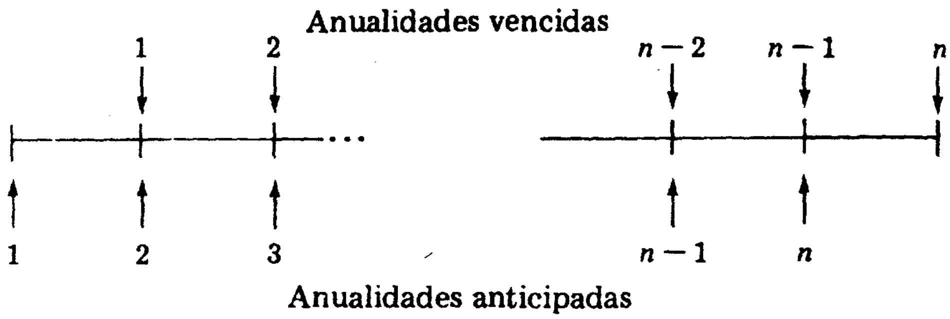
7.1 INTRODUCCION

En los negocios, es frecuente que los pagos periódicos se efectúen al comienzo de cada período; tal es el caso de la renta de terrenos, edificios y oficinas, cuyo alquiler se paga a principio de período. Las ventas a plazos suelen estipular una serie de pagos al comienzo de los períodos convenidos en el contrato de venta. En los seguros ya sean dotales, de vida o de protección contra riesgos, las pólizas, por lo general, estipulan que el asegurado debe pagar sus cuotas o primas de seguro, al comienzo de cada período. En estos casos se usa la expresión "El pago vence a principio del período".

Definición Una anualidad anticipada o inmediata es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen, al principio del período de pago.

En este capítulo, estudiaremos las anualidades simples ciertas anticipadas. Las distintas variantes que se presentan según el número de períodos de capitalización y el número de pagos en el año se estudiarán en el capítulo correspondiente al tratamiento general de las anualidades

Para comparar las anualidades anticipadas, con las anualidades vencidas es muy útil el siguiente diagrama.



7.2 SIMBOLOS UTILIZADOS EN LAS ANUALIDADES ANTICIPADAS

Todos los símbolos tienen el mismo significado que el definido en las anualidades ordinarias o vencidas, así:

R = pago periódico o renta.
i = tasa efectiva por período de capitalización.
j = tasa nominal anual.
m = número de capitalizaciones en el año.
$j_{(m)}$ = tasa nominal con rn capitalizaciones en el año.
n = número de períodos de pago.
S = monto de una anualidad o valor F en fecha futura
A = valor actual o presente de una anualidad.

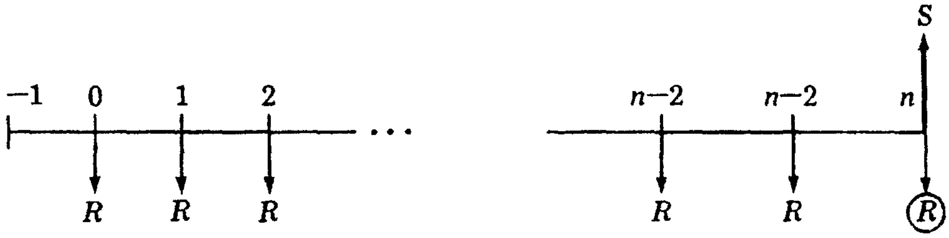
Algunos autores utilizan los símbolos: $\boxed{s_{\overline{n|}\, i}}$ y $\boxed{a_{\overline{n|}\, i}}$ para el monto y el valor actual de una anualidad anticipada de una unidad monetaria, por período, durante n períodos a la tasa i, por período. El simbolismo de uso más generalizado y, a su vez, recomendado por la Asociación Internacional de Actuarios, consiste en utilizar con diéresis los mismos símbolos que se utiliza en las anualidades vencidas, conservando su definición. Así, se tiene para las anualidades anticipadas:

$$\ddot{S},\ \ddot{A},\ \ddot{s}_{\overline{n|}\, i},\ \ddot{a}_{\overline{n|}\, i}$$

Nosotros utilizaremos lo menos posible estos símbolos, con la clara finalidad didáctica de que el estudiante comprenda que no se requieren nuevas fórmulas, para el cálculo de los valores de las anualidades anticipadas, ni tablas distintas de las que ya hemos descrito. Daremos algunas relaciones útiles para el cálculo del monto y del valor actual de las anualidades anticipadas y explicaremos diferentes métodos, para obtenerlas.

7.3 MONTO Y VALOR ACTUAL DE LAS ANUALIDADES SIMPLES CIERTAS ANTICIPADAS

Existen diferentes formas para calcular, tanto el monto, como el valor actual de las anualidades anticipadas; de éstas, daremos dos formas que consideramos las más simples y las de mayor utilidad, en el planteamiento de los problemas. Sea el diagrama de una anualidad anticipada de R por período.



Observemos que, al agregar un último pago R , se obtiene el monto de una anualidad vencida de R, por período, pagadera durante n + 1 períodos su monto es $Rs_{\overline{n+1}|\,i}$; restando a este valor el último pago R que se había agregado se obtiene el monto de una anualidad anticipada de R, por período, pagadero durante n períodos.

$$S = Rs_{\overline{n+1}|\,i} - R$$

$$S = R(s_{\overline{n+1}|\,i} - 1) \qquad (31)$$

En notación estándar

$$F = R(F/R, i\%, n)$$

El mismo resultado puede obtenerse planteando la siguiente ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal el final del período n — 1; véase el diagrama. En él, se advierte que el pago R en el período n — 1 puede considerarse como el último pago de una anualidad vencida que se inicia en el período -1.

$$S(1+i)^{-1} = Rs_{\overline{n}|\,i}$$

$S = Rs_{\overline{n}|\,i}(1+i)$ **remplazando el valor** $s_{\overline{n}|\,i}$

se tiene

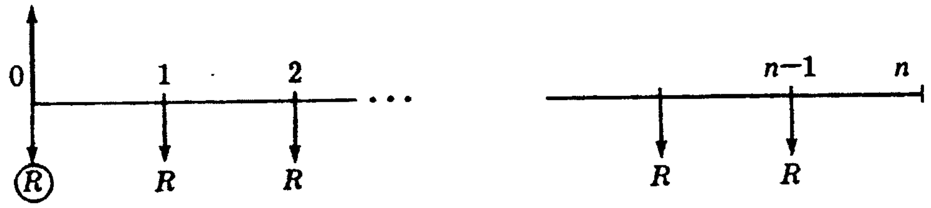
$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = R\frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}$$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}\right] = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$S = R(s_{\overline{n+1}|\,i} - 1)$$

$(s_{\overline{n+1}|\,i} - 1)$ es el monto de una anualidad anticipada de una unidad monetaria, pagada durante n períodos, a la tasa i por período.
En la notación estándar no hay diferencia entre anualidades anticipadas y vencidas, la diferencia emergería al interpretar el factor que se debe aplicar. Los valores de las anualidades anticipa. das se calculan utilizando ecuaciones de equivalencia que permitan aplicar los factores de las anualidades vencidas. Es importante que usted comprenda la necesidad de elaborar para cada problema, el correspondiente diagrama de flujo de caja; ubicando los valores actuales, los valores futuros y los pagos periódicos, determinando n numerando el diagrama de flujo de caja. Para situaciones equivalentes debe dibujar ambos diagramas y en base de ellos establecer las ecuaciones de equivalencia.

Cálculo del valor actual Si en el diagrama suprimimos el primer pago R, se tiene una anualidad vencida de R, por período, pagadera durante n -1 períodos.



Su valor actual es $Ra_{\overline{n-1}|\,i}$. Agregando a este valor el primer pago R que se había suprimido, se obtiene el valor actual de una anualidad anticipada de R, por período, pagadera durante n períodos.

$$A = ra_{\overline{n-1}|\,i} + R$$

$$A = R(a_{\overline{n-1}|\,i} + 1) \qquad (32)$$

Este mismo resultado puede obtenerse planteando la siguiente ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal la fecha inicial.

$$A = Rs_{\overline{n-1}|\,i}(1+i)^{-(n-1)} + R$$

$$A = R\,[s_{\overline{n-1}|\,i}(1+i)^{-(n-1)} + 1]$$

$$A = R\left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i}(1+i)^{-(n-1)} + 1\right]$$

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right]$$

$$A = R(a_{\overline{n-1}|\,i} + 1)$$

$(a_{\overline{n-1}|i} + 1)$ es el valor actual de una anualidad anticipada de una unidad monetaria pagadera, durante n períodos, a la tasa i por período.

El tratamiento de los problemas que involucran anualidades anticipad?.s, por lo general, no es diferente a lo tratado en los problemas de las anualidades vencidas. En todo caso, recomendamos plantear las ecuaciones de equivalencia y no atenerse a la simple aplicación de las fórmulas, ya que éstas resultan muy limitadas, ante la gran variedad de problemas que se presentan, en matemáticas financieras.
Cualquiera que sea el procedimiento de cálculo que decida para procesar un problema financiero, encontrará limitaciones. Si utiliza tablas, no encontrará en ellas factores para todas las situaciones posibles; sí utiliza calculadoras con funciones financieras, ellas tienen programas para resolver situaciones básicas de: interés simple, interés compuesto y anualidades vencidas, y si usted tiene un computador programable, programará situaciones básicas y no le convendrá estar creando programas para cada problema. Para aprovechar bien su equipo se verá obligado a plantear ecuaciones de equivalencia, que le permitan resolver situaciones nuevas utilizando las tablas o los programas de que dispone; en este sentido, nos hemos esmerado en seleccionar ejemplos y ejercicios resueltos, que lo ilustrarán suficientemente sobre los métodos para procesar problemas.

Ejemplo 7.1 Una compañía deposita al principio de cada año $ 20 000 en una cuenta de ahorros que abona el 7%. ¿A cuánto ascenderán los depósitos al cabo de 5 años?

$$S = R(s_{\overline{n+1}|i} - 1)$$

$$R = 20\,000; \quad i = 0{,}07; \quad n = 5$$

$$S = 20\,000(s_{\overline{6}|0{,}07} - 1) = 20\,000(6{,}15329074), \text{ ver tabla V}$$

$$S = \$\,123\,065{,}81$$

Operando con una calculadora que tiene la función X^Y

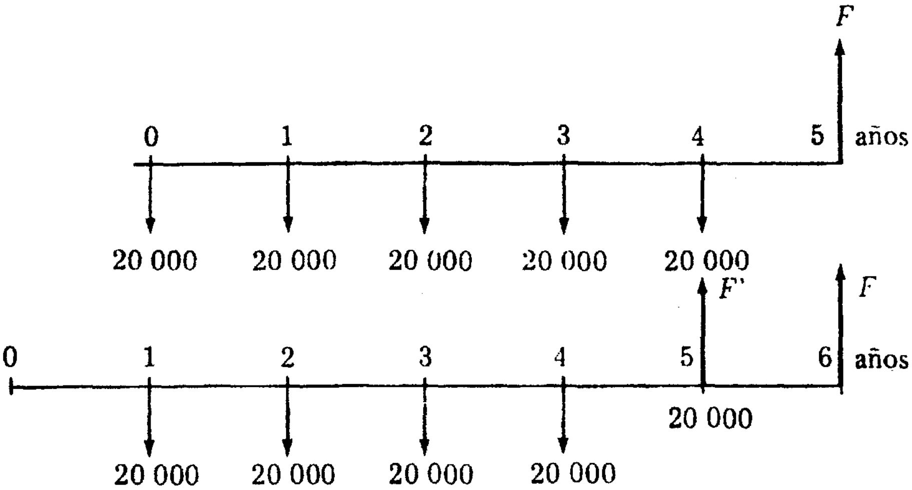
$$S = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$$

1er	paso	$1{,}07^6$	$= 1{,}5007304$
2o	paso	$1{,}5007304 - 1$	$= 0{,}5007304$
3er	paso	$0{,}5007304 : 0{,}07$	$= 7{,}1532914$

4o paso 7,1532914-1 = 6,1532914

5o paso 6,1532914(20 000) = $123 065,82

Operando con notación estándar y factores de anualidades vencidas



$F' = R(F'/R, i\%, n)$ factor de valor futuro de anualidad R; $i = 7\%$. $n = 5$; $A_{\overline{5}|}0.07 = 5{,}750739$

$F = F'(F/F', i\%, n)$ factor de valor futuro; $i = 7\%$, $n = 1$; $(1+0{,}07)^1 = 1{,}07$

$F = 20\,000(5{,}750739)(1{,}07)$

$F = 123\,065{,}81$

Ejemplo 7.2 Una compañía alquila un edificio en $ 4000 mensuales y propone al propietario pagarle el alquiler anual, a principio de cada año, con la tasa del 12% convertible mensualmente. Hallar el valor del alquiler anual.

$$A = R(a_{\overline{n-1}|\,i} + 1)$$

$$R = 4000;\ j = 0{,}12;\ m = 12;\ i = 0{,}01;\ n = 12$$

$$A = 4000(a_{\overline{11}|\,0{,}01} + 1) = 4000(11{,}36762825), \text{ ver tabla VI}$$

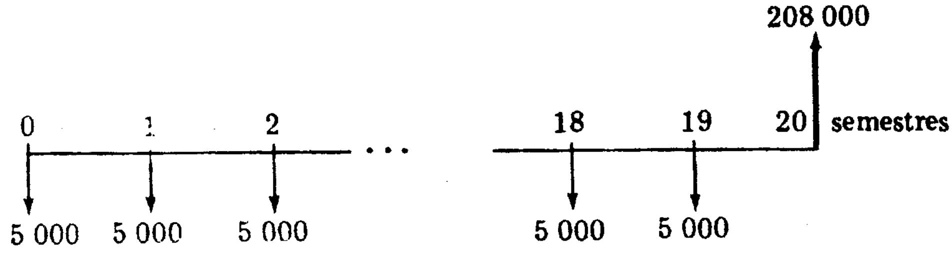
$$A = \$45\,470{,}51$$

Ejemplo 7.3 Pancho Mesa desea ahorrar dinero y debe escoger entre dos pólizas de capitalización que le ofrecen bajo las siguientes condiciones:

(a) Cancelar $5 000 semestrales pagaderos a principio de semestre durante 10 años para formar un capital de $208 000.

(b) Cancelar $2 500 trimestrales pagaderos a principio de trimestre durante 10 años para formar un capital de $215 000.
Entre las dos alternativas es mejor la que ofrece mayor tasa de retorno.

En este ejemplo, para enseñar métodos de trabajo, calcularemos las tasas de retorno, así: Para la opción (a) utilizaremos tablas y para la opción (b) una calculadora.



$$S = R(S_{\overline{n+1}|}\, i\% - 1) \qquad n = 20,\ S = 208\,000,\ R = 5\,000$$

$$208\,000 = 5\,000(S_{\overline{21}|}\, i\% - 1)$$

$$S_{\overline{21}|}\, i\% - 1 = 208\,000 : 5\,000 = 41{,}6$$

$$S_{\overline{21}|}\, i\% = 42{,}6$$

se busca en la tabla V para $M = 21$, los valores más próximos a 41,6

$$S_{\overline{21}|\,0{,}065} = 42{,}31895373$$

$$S_{\overline{21}|\,0{,}07} = 44{,}86517678$$

a 0,07	corresponde 44,86517678	a	i	corresponde 42,600000
a 0,065	corresponde 42,34895373	a 0,065		corresponde 42,34895373
0,005	es a 2,51622305	como i–0,065		es a 0,25104627

$$\frac{0{,}005}{2{,}51622305} = \frac{i - 0{,}065}{0{,}25104627}$$

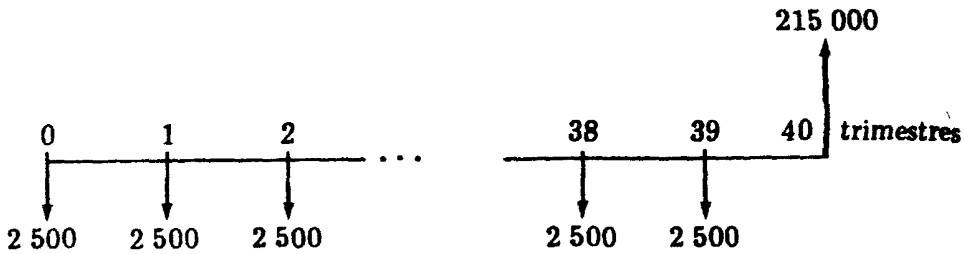
$$i - 0{,}065 = \frac{0{,}005(0{,}25104627)}{2{,}51622305}$$

$$i \approx 0{,}00049886 + 0{,}065$$

$$i = 0.06549886$$

$$j_{(2)} = 13{,}1$$

Opción (b). Solución utilizando una calculadora con función X^Y



$S = 215\,000, R = 2\,500, n = 40$

$$S = R\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right)$$

$$215\,000 = 2\,500\left(\frac{(1+i)^{41}-1}{i}-1\right)$$

$$\frac{(1+i)^{41}-1}{i} = 87$$

A buen criterio, ensayamos con $j_{(4)} = 12\%$ i = 0,03

ler. paso $(1{,}03)^{41}$ = 3,3598989
2o. paso 3,3598989-1 = 2,3598989
3er. paso 2,3598989:0,03 = 78,6632966 < 87

ensayamos con i = 0,035 y repetimos los pasos y obtenemos
3er. paso = 88,50953714 >87

ensayamos con i -= 0,034 y obtenemos
3er. Paso = 86,4294676 < 87

ensayamos con i = 0.0345
3er. paso = 87,4622696> 87

ensayamos con i = 0.0313
3er. paso = 87,047 1256 > 87 valor que es suficientemente aproximado

i = 0,0343 $j_{(4)} = 13{,}72\%$

Respuesta: la oferta (b) es mejor por ofrecer mayor base de retorno.

7,4 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que se obtiene el mismo monto, en n períodos, a la tasa i con una renta R vencida, que con la renta R pagada aprincipio de período con descuento racional, a la misma tasa i.

$$S = \frac{R}{1+i}(s_{\overline{n+1}|\,i} - 1)$$

$$S = \frac{R}{1+i}\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$S = \frac{R}{1+i}\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}\right]$$

$$S = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = Rs_{\overline{n}|\,i}$$

2. El dueño de una propiedad cobra por el alquiler de ella $ 5000, por mes anticipado. Hallar la pérdida que le significa en dos años, si el arrendatario le pagó por mes vencido (tasa nominal 12%).

Monto vencido

$$S_1 = 5000s_{\overline{24}|\,0,01}$$

$$S_1 = 5000(26{,}97346485)$$

$$S_1 = \$\,134\,867{,}32$$

Monto anticipado

$$S_2 = 5000(s_{\overline{25}|\,0,01} - 1)$$

$$S_2 = 5000(27{,}2431995)$$

$$S_2 = \$\,136\,216{,}00$$

$$\textbf{Pérdida} = S_2 - S_1$$

$$= \$\,1348{,}68$$

3. Demostrar que, en el problema anterior, la pérdida sufrida por el arrendatario es el monto correspondiente al descuento racional, a la tasa i.

$$D = C(1 - \frac{1}{1+i})$$

$$C = 5000;\quad i = 0{,}01$$

$$D = 5000(1 - \frac{1}{1{,}01})$$

$$D = 50{,}505$$

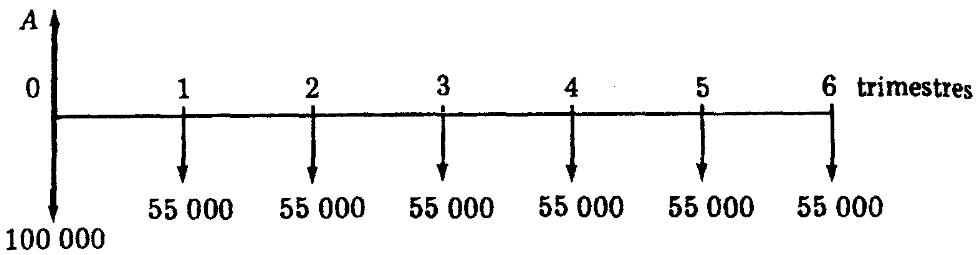
$$S = 50{,}505(s_{\overline{25}|\,0,01} - 1)$$

$$S = 50{,}505(27{,}2431995)$$

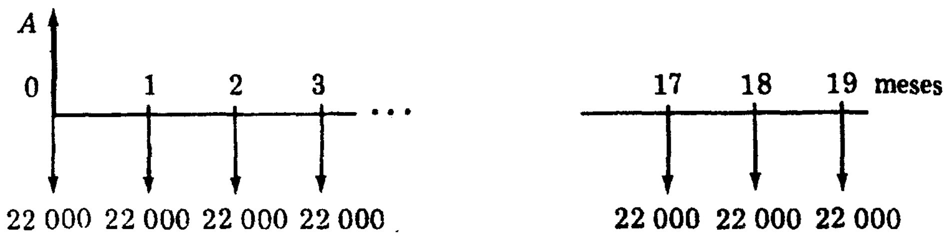
$$S = \$\,1348{,}68$$

4. El dueño de una propiedad avaluada en $ 400 000 recibe por ella las siguientes ofertas: (a) $100 000, al contado, y el sal-do en 6 pagos trimestrales de $55 000 cada uno; (b) 20 pagos mensuales de $ 22 000 cada uno, efectuando el primer pago de inmediato. Tasa de interés del 12% nominal. ¿Qué oferta le conviene más?

Oferta (a)



Oferta (b)



Se calcula el valor actual de cada oferta.

(a) $A = 100\,000 + 55\,000 a_{\overline{6|}0,03}$

$A = 100\,000 + 55\,000(5{,}41719144)$

$A = \$\,397\,945{,}50$

(b) $A = 22\,000(a_{\overline{20-1|}0,01} + 1) = 22\,000(18{,}2260085)$

$A = \$\,400\,972{,}20$

Es preferible la oferta (b)

Solución utilizando calculadora

Oferta (a);

$j = 12\%,\ m = 4,\ i = 0{,}12 : 4 = 0{,}03$

$$A = 100\,000 + \frac{1-(1+0{,}03)^{-6}}{0{,}03}$$

1er paso $(1{,}03)^{-6}$ = 0,83748426
2º paso 0,83738426-1 = -0,16251574
3er paso 0,16251574:0,03 = 5,41719133

4o. paso 5,41719133 (55 000) = 297 945,52
5o. paso 297 945,52+100 000 = 397 945,50

A = 397 945,50

Oferta (b):
j=12%, m= 12, i=0,12 : 12= 0,01

$$A = 22\,000\left(\frac{1-(1+0{,}01)^{-19}}{0{,}01}+1\right)$$

ler. paso $1{,}01^{-19}$ = 0,82773992

2o. paso 0,82773992-1 = -0,1722601 (cambio signo)

3er. paso 0,1722601: 0,01 = 17,22601

40. paso 17,22601 + 1 = 18,22601

5o. paso 18,22601(22 000) = 400 972,20

A = 400 972,20

5. Un comerciante vende neveras a \$ 7500 al contado. Promueve su venta a plazos, en 18 meses, sin cuota inicial, con un recargo del 24% convertible mensualmente. Hallar la cuota periódica o renta.

$$A = R(a_{\overline{n-1|}\,i} + 1)$$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n-1|}\,i} + 1}$$

$$A = 7500;\ \ j = 0{,}24;\ \ m = 12;\ \ i = 0{,}02;\ \ n = 18$$

$$R = \frac{7500}{15{,}29187188} = \$\,490{,}45$$

6. Un comerciante estima que puede aumentar sus ventas, ofreciendo televisores que valen \$ 4200 de contado, en cuotas mensuales de \$ 300 cada una y sin cuota inicial. Hallar el número de cuotas, si se carga el 18% de intereses, convertibles mensualmente.
(Véase el ejemplo 6.6)

$$A = R(a_{\overline{n-1|}\,i} + 1)$$

$$A = 4200;\ \ R = 300;\ \ j = 0{,}18;\ \ m = 12;\ \ i = 0{,}015$$

$$4200 = 300(a_{\overline{n-1|}\,0{,}015} + 1)$$

$$a_{\overline{n-1}|0{,}015} = \frac{4200}{300} - 1 = 13$$

En la tabla VI columna del $1\frac{1}{2}\%$, el valor 13 está comprendido entre $a_{\overline{14}|0{,}015}$ y $a_{\overline{15}|0{,}015}$ cuyos respectivos valores son: 12,54338150 y 13,34323301. Como en el ejemplo 6.6, procedemos por interpolación.

a 15 corresponde 13,34323301	a $n-1$ corresponde 13,00000000
a 14 corresponde 12,54338150	a 14 corresponde 12,54338150
1 es a 0,79985151	como $n-15$ es a 0,45661850

$$\frac{1}{0{,}79985151} = \frac{n-15}{0{,}45661850}$$

$$n - 15 = \frac{0{,}45661850}{0{,}79985151} = 0{,}57087909$$

Respuesta práctica: 15 pagos de \$ 300 y un último pago al principio del período 16 de 0,57087909 (300) = \$171,26.

7. Resolver el problema 6, utilizando una calculadora.

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right]$$

$$A = 4200;\quad R = 300;\quad i = 0{,}015$$

$$4200 = 300\left[\frac{1-1{,}015^{-(n-1)}}{0{,}015} + 1\right]$$

1er. paso $\quad 1{,}015^{-(n-1)} = 0{,}805$

2o. paso $\quad -(n-1)\ln(1{,}015) = \ln(0{,}805)$

3er. paso $\quad -n+1 = \dfrac{\ln(0{,}805)}{\ln(1{,}015)}$

$$n = 15{,}659$$

Se efectúan 15 pagos anticipados de \$300 y un último pago, al principio del período 16 de:

$$S = 300\left(\frac{1{,}015^{16}-1}{0{,}015} - 1\right)$$

$$S = \$5079{,}71$$

$$4200(1{,}015)^{15} = \$5250{,}97$$

$$\text{último pago} = 5250{,}97 - 5079{,}71 = \$171{,}26$$

ANUALIDADES DIFERIDAS

En este capítulo estudiará el manejo de las anualidades diferidas, aprenderá a definirlas, reconocer sus factores y compararlas con las anualidades vencidas y anticipadas. Perfeccionará y practicará sus conocimientos sobre ecuaciones de equivalencia y diagramas de flujo de caja.

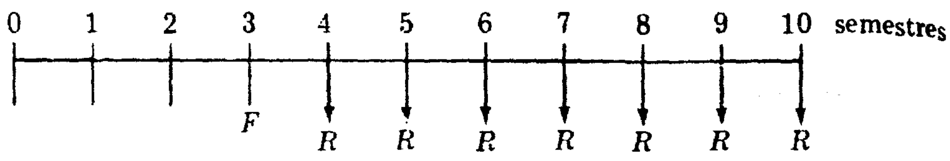
Al terminar el estudio del capítulo será capaz de plantear y resolver situaciones económicas en que intervienen las anualidades diferidas y calcular, por diferentes métodos: montos o valor futuro, valor actual o presente, rentas, tasas y plazos efectivos y diferidos.

ANUALIDADES DIFERIDAS

.1 INTRODUCCION En los negocios, es frecuente que algunas circunstancias obliguen a que el primer período de pago comience en una fecha futura, hasta después de trascurrido un cierto tiempo desde el momento inicial o de convenio. Es decir, no coincide la fecha inicial de la anualidad, con la fecha del primer pago. En estos casos, se dice que la anualidad es diferida.

Definiciones Una anualidad diferida es una anualidad cuyo plazo comienza después de trascurrido un intervalo de tiempo.

Intervalo de aplazamiento Es el tiempo que trascurre entre la fecha inicial, o fecha de valoración de la anualidad, y la fecha del primer pago.
Para medir el intervalo de aplazamiento, se utiliza como unidad el tiempo que corresponde a un período de pago. Así, por ejemplo: si dentro de 2 años se efectuara el primer pago de una anualidad vencida de $ R por semestre y cuyo plazo es de 3 años, tendremos



F = fecha inicial de la anualidad vencida

Tiempo diferido = 3 períodos semestrales
Tiempo o plazo de la anualidad = 7 períodos
Tiempo total = tiempo diferido más tiempo de la anualidad

Por lo general, las anualidades diferidas se analizan como anualidades ordinarias o vencidas; de manera que, en los problemas, al hablar de una anualidad diferida, se supone que es vencida.

8.2 SIMBOLOS UTILIZADOS EN LAS ANUALIDADES DIFERIDAS

Los símbolos utilizados en las anualidades diferidas tienen el mismo significado, que los utilizados en las anualidades estudiadas en los capítulos 6 y 7. Algunos autores separan para su análisis dos grupos de anualidades diferidas; las anualidades diferidas vencidas y las anualidades diferidas anticipadas, y utilizan los símbolos $_{k|}a_{\overline{n|}\,i}$ y $_{k|}s_{\overline{n|}\,i}$ para expresar, respectivamente, el valor actual y el monto de una anualidad diferida vencida de una unidad monetaria por período, diferida en su pago k períodos y pagadera durante n períodos, a la tasa i por período. Para las anualidades diferidas anticipadas, utilizan los mismos símbolos, con diéresis o encerrados en un recuadro así:

$$\boxed{_{k|}a_{\overline{n|}\,i}} \quad \boxed{_{k|}s_{\overline{n|}\,i}} \quad _{k|}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i},\ _{k|}\ddot{s}_{\overline{n|}\,i}.$$

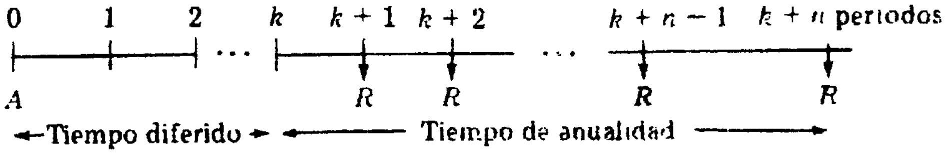
Nosotros no utilizaremos estos símbolos porque consideramos que no son necesarios y, además, nuestra experiencia nos ha permitido apreciar que su uso es perjudicial, debido a que en el tratamiento de los problemas crea confusiones a los estudiantes de matemáticas financieras.

8.3 VALORES DE LAS ANUALIDADES DIFERIDAS SIMPLES CIERTAS

Para el cálculo de los valores de las anualidades diferidas, no se requieren nuevas fórmulas ni tablas distintas de las que ya hemos descrito en los capítulos anteriores.
El lector debe comprender la importancia de analizar los problemas, utilizando diagramas que le permitan determinar, cuidadosamente, el tiempo diferido y el tiempo de pago, para luego plantear las ecuaciones de equivalencia que conducen a la correcta

solución. No es conveniente memorizar fórmulas o procedimientos, ya que estos resultan inútiles ante la gran variedad de problemas que suelen presentarse. El lector debe desarrollar su propia imaginación y creatividad, en el tratamiento de los problemas.

Cálculo del valor actual Sea una anualidad vencida, diferida k períodos, de $R por período pagaderos durante n períodos, a la tasa i por período. Dibujando un diagrama, se tiene:

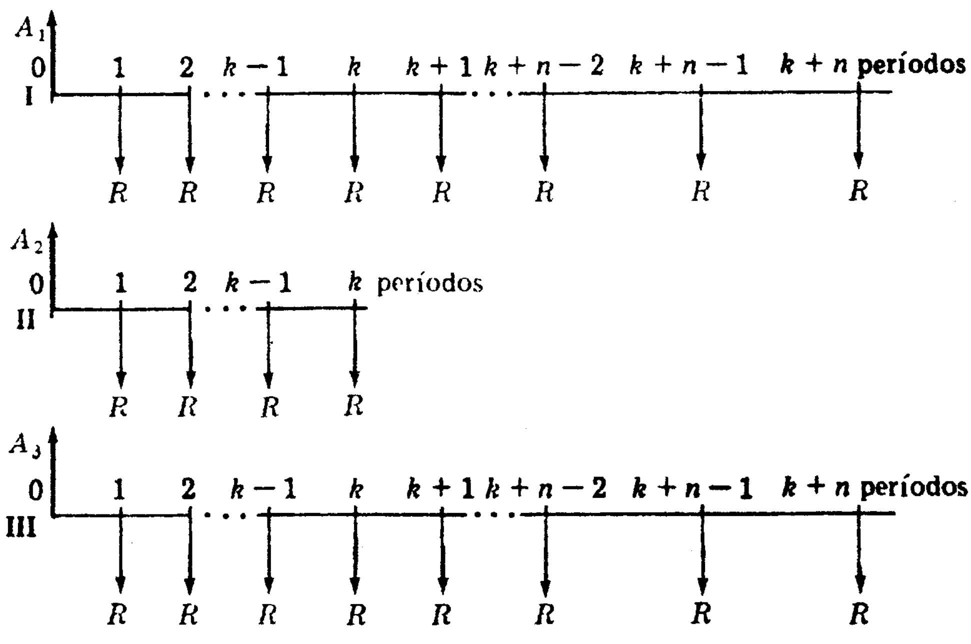


Formando una ecuación de equivalencia y utilizando como fecha focal el final del período k, se tiene, siendo A el valor actual o presente en la fecha inicial,

$$A(1+i)^{k} = Ra_{\overline{n}|\,i}$$

De donde $A = R(1+i)^{-k}a_{\overline{n}|\,i}$ **(33)**

Otro método para calcular el valor de las anualidades diferidas consiste en tratarlas como diferencia, entre dos anualidades no diferidas, así:



El valor actual de I es $A_1 = Ra_{\overline{k+n}|\,i}$

El valor actual de II es $A_2 = Ra_{\overline{k}|\,i}$

El valor actual de III es $A_3 = A_1 — A_2$

$$A_3 = Ra_{\overline{k+n}|\,i} - Ra_{\overline{k}|\,i}$$

De donde, el valor actual A de la anualidad diferida k períodos es:

$$A = R(a_{\overline{k+n}|\,i} - a_{\overline{k}|\,i}) \qquad (34)$$

En el problema 8 del capítulo 6, se demostró que

$$a_{\overline{k+n}|\,i} = a_{\overline{k}|\,i} + (1+i)^{-k}a_{\overline{n}|\,i}$$

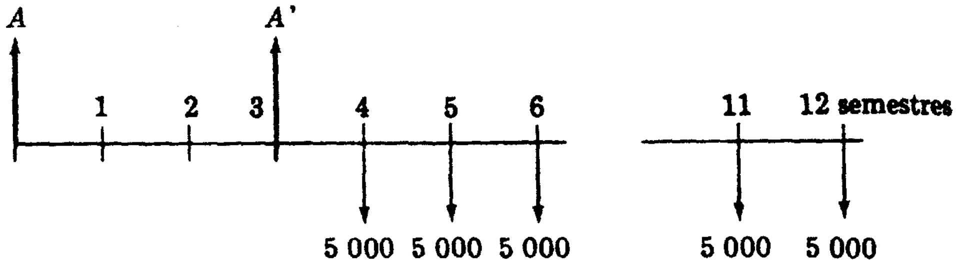
sustituyendo en la fórmula *(33)*, se tiene

$$A = R\,[a_{\overline{k}|\,i} + (1+i)^{-k}a_{\overline{n}|\,i} - a_{\overline{k}|\,i}]$$

o sea $\quad A = R(1+i)^{-k}a_{\overline{n}|\,i}$

La fórmula (34) ofrece algunas ventajas para el cálculo y, por esto, es más utilizada que la fórmula (33).

Ejemplo 8.1 Calcular el valor actual de una renta de $ 5000 semestrales, si el primer pago debe recibirse dentro de 2 años y el último, dentro de 6 años, si la tasa de interés es del 8%, convertible semestralmente.
Dibujemos el diagrama que corresponde a las condiciones del problema.



El intervalo diferido es de 3 períodos y el tiempo de pago tiene 9 períodos

$$A = R(a_{\overline{k+n}|\,i} - a_{\overline{k}|\,i})$$

$$R = 5000;\ j = 0{,}08;\ m = 2;\ i = 0{,}04;\ k = 3;\ n = 9$$

$$A = 5000(a_{\overline{12}|\,0{,}04} - a_{\overline{3}|\,0{,}04})$$
$$A = 5000(9{,}38507376 - 2{,}77509103) = 5000(6{,}60998273)$$
$$A = \$\,33\,049{,}91$$

Si aplicamos la fórmula *(33)*, el cálculo se desarrolla así:

$$A = R(1+i)^{-k}a_{\overline{n}|\,i}$$

$$A = 5000(1 + 0{,}04)^{-3} a_{\overline{9}|0{,}04}$$

$$A = 5000(0{,}88899636)(7{,}43533161)$$

$$A = \$\,33\,049{,}91$$

Solución con calculadora, utilizando el diagrama de flujo de caja, primero calculamos el valor actual A' de la anualidad vencida de \$5 000 durante 9 semestres con la tasa i = 0,04

$$A' = Ra_{\overline{n}|i} = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = 5\,000,\ n = 9,\ i = 0{,}04$$

$$A' = 5\,000\,\frac{1-(1{,}04)^{-9}}{0{,}04}$$

ler. paso	$(1{,}04)^{-9}$ =	0,70258674
2o. paso	0,70258678—1 =	-0,29741326 (cambio signo)
3er. paso	0,29741326:0,04 =	7,4353315
4o. paso	7,4353315(5 000) =	37176,66
	A' =	37176,16 se lleva a memoria
	$A = A'(1+i)^{-k}$	k = 3
5o. paso	$(1{,}04)^{-3}$ =	0,88899636
6o. paso	0.88899636(37176,66) =	33 049,91
	A =	33 049,91

En el problema 1 encontrará otra solución con calculadora aplicando la fórmula 34.

Solución operando con calculadora con funciones financieras

primero se calcula A'

$A' = R(A'/R,\ j_{(2)},\ n)$ **función anualidades valor presente**

luego se calcula $A = A'(A/A',\ j_{(3)},n)$ **función interés compuesto valor presente**

para $R = 5\,000,\ j_{(2)}) = 8\%\ \ n = 9;\ n = 3$

primera respuesta $A' = 5\,000(A/R,\ J_{(2)}\ 8\%,\ 9) = 37\,176{,}66$

respuesta $A = 37\,176{,}66(A/A',\ j_{(2)}\ 8\%,\ 3) = 33\,049{,}61$

respuesta $A = \$33\,049{,}61$

Las calculadoras admiten en su programa la secuencia de los pasos que usted le ordene y dan la respuesta final \$33 049,61

Cálculo del monto El monto de la anualidad diferida es el propio monto de la anualidad, correspondiente al tiempo de pago. Su cálculo fue tratado en los capítulos 6 y 7.

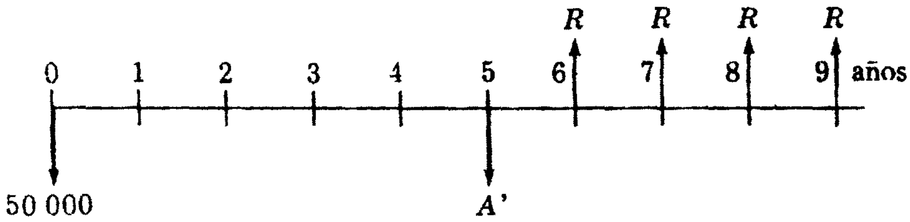
Cálculo de la renta Para el cálculo de la renta se despeja, según sea el caso, el valor R en la fórmula (33) o en la fórmula (34).
Utilizando la fórmula (33) $A = R(1+i)^{-k} a_{\overline{n}|\,i}$ y despejando R , se tiene

$$R = \frac{A(1+i)^k}{a_{\overline{n}|\,i}}$$

Utilizando la fórmula ***(34)*** $A = R(a_{\overline{n+k}|\,i} - a_{\overline{k}|\,i})$ **y despejando** R**, se tiene**

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n+k}|\,i} - a_{\overline{k}|\,i}}$$

Ejemplo 8.2 Al cumplir un joven 12 años, su padre deposita $50 000 en un fondo universitario que abona el 8%, para que al cumplir el hijo 18 años, reciba una renta anual suficiente para costear sus estudios universitarios, durante 4 años. Hallar el costo anual de los estudios.



$A = \$50\,000$; $i = 0{,}08$; $k = 5$; $n = 4$

$$R = \frac{50\,000}{a_{\overline{5+4}|\,0{,}08} - a_{\overline{5}|\,0{,}08}} = \frac{50\,000}{6{,}24688791 - 3{,}99271004}$$

$$R = \frac{50\,000}{2{,}25417787} = \$\,22\,181{,}04$$

Solución por medio de ecuaciones de equivalencia y utilizando una calculadora; en el ejercicio 2 se da otra solución utilizando una calculadora y aplican-do la fórmula 34.

$$A = A'(1+i)^{-k}$$

$$A' = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

A = 50 000, i = 0,08, n = 4, k = 5

$$50\,000 = R\,\frac{1-(1{,}08)^{-4}}{0{,}08}\,(1{,}08)^{-5}$$

ler. paso	$(1{,}08)^{-8} = 0{,}73502985$
2o. paso	0.73502985—1 =-0,26497015 (cambio signo)
3er. paso	0,26497015 : 0,08 = 3,31212687 (a memoria)
4o. paso	$(1{,}08)^{-5} = 0{,}6805832$
5o. Paso	0,6805832 (3,31212687) = 2,2541779 (a memoria)
	50 000 = R(2,2541779)
6o. grado	R = 50 000: 2,2541779
	R = 22 181,04

Cálculo del tiempo Estos problemas del cálculo del tiempo son poco frecuentes. Hay dos tiempos distintos que pueden calcularse: el tiempo diferido y el tiempo de la anualidad.
Para el tiempo diferido, se tiene

$$A = R(1+i)^{-k} a_{\overline{n|}i}$$

$$(1+i)^{-k} = \frac{A}{R a_{\overline{n|}i}}$$

$$(1+i)^{k} = \frac{R a_{\overline{n|}i}}{A}$$

Luego, se procede como en los capítulos anteriores, por interpolación o aplicando logaritmos.
Para el tiempo de la anualidad, se tiene

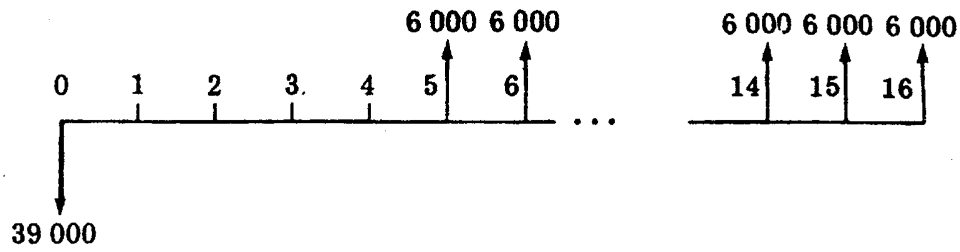
$$A = R(1+i)^{-k} a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{A(1+i)^{k}}{R}$$

Luego, se procede por interpolación o aplicando logaritmos.

Ejemplo 8.3 Alguien deposita en un banco que abona el 7%, la suma de $100 000, para que, dentro de 5 años, le pague una renta de $ 20 000 anuales; hallar el número de pagos.

$$A = R(1+i)^{-k} a_{\overline{n|}i}$$



$$A = 39\,000;\quad R = 6000;\quad k = 4;\quad n = 12$$

$$39\,000 = 6000(a_{\overline{12+4}|\,i} - a_{\overline{4}|\,i})$$

$$a_{\overline{16}|\,i} - a_{\overline{4}|\,i} = \frac{39\,000}{6000} = 6{,}5$$

Procediendo por tanteo en la tabla VI, se busca, restando mentalmente los valores para n = 16 y n = 4, el valor que más se aproxime a 6,5. Así, se encuentra que está comprendido entre las siguientes diferencias.

Para la tasa del 6% $a_{\overline{16}|0,06} - a_{\overline{4}|0,06} = 10{,}10589527 - 3{,}46510561 = 6{,}64078966$

Para la tasa del $6\frac{1}{2}$% $a_{\overline{16}|0,065} - a_{\overline{4}|0,065} = 9{,}76776418 - 3{,}42579860 = 6{,}34196558$

Respuesta práctica: la tasa está comprendida entre 6% y 6 ½ %. En el caso que se desee o sea necesaria una mayor aproximación, se procede por interpolación lineal.

Vea en el problema 4 una solución utilizando calculadora.

1. Resolver el problema del ejemplo 8.1, utilizando . una calculadora.

$$A = 5000(a_{\overline{12}|\,0,04} - a_{\overline{3}|\,0,04})$$

$$A = 5000\left[\frac{1-(1{,}04)^{-12}}{0{,}04} - \frac{1-(1{,}04)^{-3}}{0{,}04}\right]$$

$$A = \frac{5000}{0{,}04}\left[(1{,}04)^{-3} - (1{,}04)^{-12}\right]$$

$(1{,}04)^{-12} = 0{,}62459705$ **Entra en memoria**

$$(1{,}04)^{-3} = 0{,}88899636$$

$$0{,}2464399 = 0{,}88899636 - MR$$

$$33049{,}91 = 0{,}2464399\,(5000) \div 0{,}04$$

$$A = \$\,33\,049{,}91$$

2. Resolver el problema del ejemplo 8.2, utilizando una calculadora.

$$R = \frac{50\,000}{\dfrac{1-(1{,}08)^{-9}}{0{,}08} - \dfrac{1-(1{,}08)^{-5}}{0{,}08}}$$

$$R = \frac{50\,000(0{,}08)}{(1{,}08)^{-5} - (1{,}08)^{-9}}$$

$(1{,}08)^{-9} = 0{,}50024897$ **Entra en memoria**

$(1{,}08)^{-5} = 0{,}6805832$

$0{,}6805832 - \mathrm{MR} = 0{,}1803342$ **Entra a memoria**

$$22\,181{,}03 = 50\,000\,(0{,}08) \div \mathrm{MR}$$

$$R = \$\,22\,181{,}03$$

3. Resolver el problema del ejemplo 8.3, utilizando una calculadora.

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{A(1+i)^k}{R}$$

$$A = 100\,000; \quad R = 20\,000; \quad i = 0{,}07; \quad k = 4$$

$$\frac{1-(1{,}07)^{-n}}{0{,}07} = \frac{100\,000(1{,}07)^4}{20\,000}$$

$$(1{,}07)^{-n} = 1 - \frac{0{,}07(100\,000)(1{,}07)^4}{20\,000}$$

$$(1{,}07)^{-n} = 0{,}5412214$$

$$(-n)\ln(1{,}07) = \ln(0{,}5412214)$$

$$n = -\frac{\ln(0{,}5412214)}{\ln(1{,}07)}$$

$$n = 9{,}0738857$$

9 pagos de $ 20 000 para hallar el último pago x, se plantea una ecuación de equivalencia.

$$100\,000 = x(1{,}07)^{-14} + (1{,}07)^{-4}(20\,000)\frac{1-(1{,}07)^{-9}}{0{,}07}$$

$$x = 100\,000(1{,}07)^{14} - (1{,}07)^{+10}(20\,000)\frac{1-(1{,}07)^{-9}}{0{,}07}$$

$$x = \$\,1524{,}44$$

4. Resolver el problema del ejemplo 8.4, utilizando una calculadora.

$$A = R(a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i})$$

$$A = 39\,000; \quad R = 6000; \quad k = 4; \quad n = 12$$

$$39\,000 = 6000\left[\frac{1-(1+i)^{-16}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-4}}{i}\right]$$

$$= \frac{(1+i)^{-4} - (1+i)^{-16}}{i} = 6{,}5$$

$$\text{para: } i = 5\% \qquad \frac{(1{,}05)^{-4} - (1{,}05)^{-16}}{0{,}05} = 7{,}291819$$

$$i = 6\% \qquad \frac{(1{,}06)^{-4} - (1{,}06)^{-16}}{0{,}06} = 6{,}640790$$

$$i = 6{,}5\% \qquad \frac{(1{,}065)^{-4} - (1{,}065)^{-16}}{0{,}065} = 6{,}341966$$

$$i = 6{,}2\% \qquad \frac{(1{,}062)^{-4} - (1{,}062)^{-16}}{0{,}062} = 6{,}511924$$

$$i = 6{,}25 \qquad \frac{(1{,}0625)^{-4} - (1{,}0625)^{-16}}{0{,}0625} = 6{,}489274$$

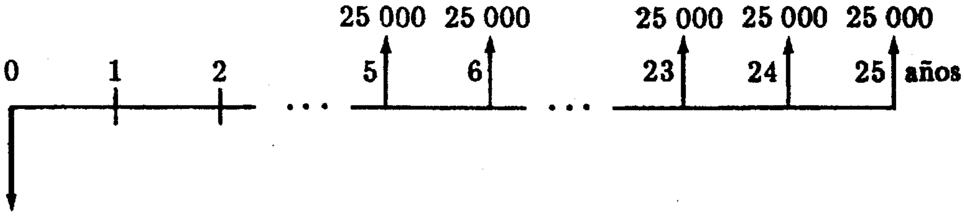
$$i = 6{,}23 \qquad \frac{(1{,}0623)^{-4} - (1{,}0623)^{-16}}{0{,}0623} = 6{,}501238$$

6,23 % es una aproximación aceptable.

5. Alguien desea establecer un fondo, de manera que un hospital que estará terminado dentro de 5 años, reciba para su funcionamiento una renta anual de $ 25 000, durante 20 años. Hallar el valor del fondo, si gana el 8% de interés.

6,23 % es una aproximación aceptable.

$$A = R(a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i})$$

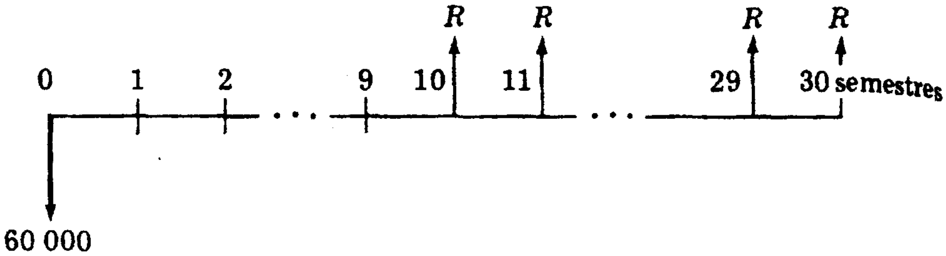


$$R = 25\,000; \quad i = 0{,}08; \quad k = 4; \quad n = 21$$

$$A = 25\,000(a_{\overline{25}|0{,}08} - a_{\overline{4}|0{,}08})$$

A = 25 000(10,67477619 — 3,31212684)
A = $184 066,23

6. Una persona deposita hoy $ 60 000 en un banco que abona el 7% para que, dentro de 5 años, se le comience a pagar una renta que se le cancelará semestralmente, durante 10 años. Hallar la renta semestral que recibirá.

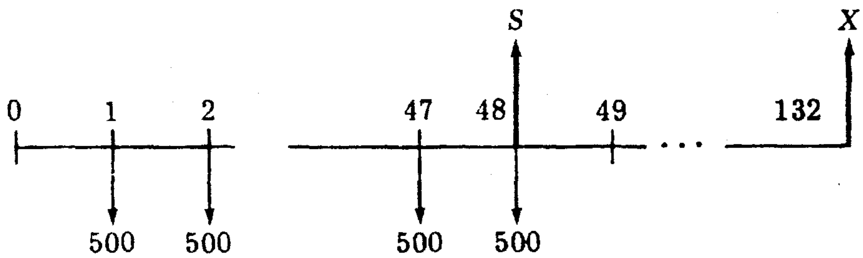


$A = 60\,000;\ j = 0{,}07;\ m = 2;\ i = 0{,}035;\ k = 9;\ n = 21$

$$A = 60\,000 = R(a_{\overline{21+9}|0{,}035} - a_{\overline{9}|0{,}035}) = R(18{,}39204541 - 7{,}60768651)$$

De donde $$R = \frac{60\,000}{10{,}78435890} = \$5563{,}61$$

7. Una persona deposita en un banco $ 500 cada final de mes, durante 4 años consecutivos. Hallar la suma que tendrá en su cuenta 7 años después del último depósito, si el banco abona el 6%, convertible mensualmente.



$$S = Rs_{\overline{n}|\,i}$$

$R = 500;\ n = 48;\ i = 0{,}005$. No hay intervalo diferido; ésta es una anualidad vencida cuyo monto S queda difendo k períodos para su cobro, $k = 84$.

Para el cálculo, establecemos una ecuación de equivalencia, utilizando la fecha final como fecha focal.

$$X = 500s_{\overline{48}|0{,}005}(1 + 0{,}005)^{84} = 500(54{,}09783222)(1{,}52036964)$$

$$X = \$41\,124{,}35$$